جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج



# الرياضيات

## للصف الثالث المتوسط


المؤلفون

الدكتور طارق شعبان الحديثي | محمد عبد الغفور الجواهري
مهدي مال الله مكي | منعم حسين علوان



الطبعة السابعة
١٤٣٨ هـ - ٢٠١٧ م

استناداً الى القانون يوزع مجاناً ويمنع بيعه وتداوله في الاسواق




الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج






# المقدّمةُ

نظراً للتطور الكبير الحاصل في المواد الدراسية كافة والرياضيات خاصة تعنى وزارة التربية باعادة النظر في الكتاب المدرسي وتنقيحه او اعادة تأليفه وفق لجان مختصة تؤلف لهذا الغرض وتلقى كتب الرياضيات نصيبها الوافي من هذه العناية .

وهذا الكتاب الثالث من سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة المتوسطة ، وقد رتبنا هذا الكتاب بعشرة فصول ، يبدأ الفصل الاول بموضوع التطبيقات والفصل الثاني الاعداد الحقيقية ، اما الفصل الثالث الحدوديات ويتضمن الفصل الرابع المتباينات يتبعه في الفصل الخامس المثلثات اما موضوع الدائرة فهو في الفصل السادس وعند الفصل السابع الهندسة الاحداثية اما الفصل الثامن هندسة التحويلات يتضمن الفصل التاسع حساب المثلثات وينتهي الكتاب بالفصل العاشر الذي اختص بدراسة موضوع الاحصاء .

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للمنهج الدراسي المقرر وحاولنا ان نستخدم الطرق التربوية الحديثة فقمنا بهذا المجهود واضعين نصب اعيننا توضيح المادة العلمية شرحاً بقصد الافهام وتوخينا الاكثار من الامثلة المحلولة والتمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته ومتدرجة من السهل الى الصعب.

وختاماً نرجو ان نكون قد وفقنا لخدمة ابنائنا الطلبة و نرجو من اخواننا المدرسين ان يوافونا بملاحظاتهم حول هذا الكتاب لكي نتلافى النقص فيه ، والكمال لله وحده..

والله ولي التوفيق

المؤلفون

# الفصل الاول 1

# التطبيقات Mappings



[1-1] التطبيق .

[1-2] نوع التطبيق .

[1-3] المخطط البياني للتطبيق .

[1-4] تركيب التطبيقات .

| المصطلح | الرمز أو العلاقة الرياضية |
|---|---|
| الأعداد الطبيعية | N |
| الأعداد الصحيحة | Z |
| الأعداد النسبية | Q |
| تركيب التطبيقين $f, g$ | $gof$ أو $fog$ |




# التطبيقات Mappings

## مقدمة

سبق وأن درست موضوع المجموعات والعمليات عليها وتعلمت أيضاً العلاقة من المجموعة A الى المجموعة B هي مجموعة من الأزواج المرتبة. حيث أن r رمز للعلاقة من A الى B.

وأن r مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$

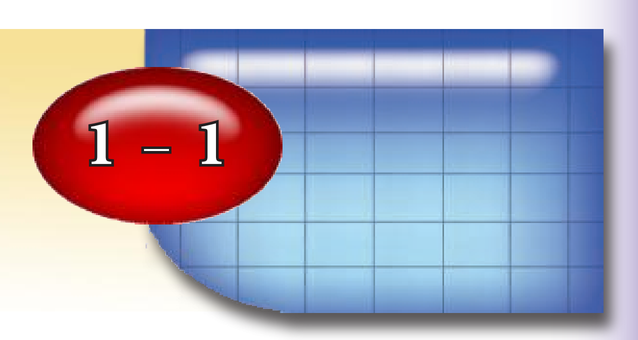
$$r \subseteq A \times B$$

ودرست أيضا خواص العلاقة على المجموعة مثل :

- الخاصية الأنعكاسية (Reflexive) .
- والخاصية المتناظرة (Symmetric) .
- والخاصية المتعدية (Transitive) .
- وكذلك خاصية التكافؤ (Equivalence) اذا حققت الخواص الثلاث السابقة .

(أنعكاسية، متناظرة، متعدية) .

في هذه المرحلة الدراسية، سنتعرف على مفهوم أخر هو التطبيق (Mapping)



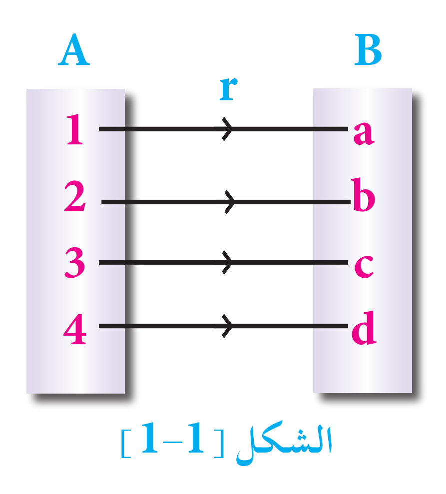

# التطبيق (Mapping)

لتكن $B \longrightarrow A : r$ وتقرأ ( r علاقة من A الى B )

ولتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$

$r = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

لاحظ أن كل عنصر في المجموعة A التي تسمى بالمجال يقترن بعنصر وحيد في المجموعة B التي تسمى بالمجال المقابل كما في الشكل [1–1] الذي يمثل المخطط السهمي للعلاقة r .




الشكل [1–1]

ومن خلال الشكل هناك سهم واحد فقط ينطلق من كل عنصر في المجموعة A ليرتبط مع عنصر واحد من المجموعة B . يقال لهذه العلاقة تطبيق وأن صور عناصر المجموعة A تحت تأثير (التطبيق ) يسمى مدى (Range) التطبيق.

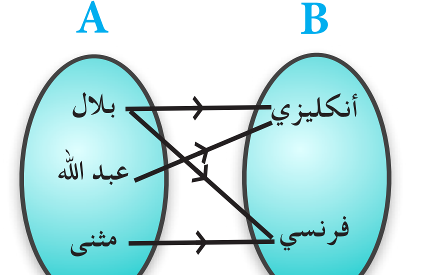
### بصورة عامة [1–1]

التطبيق r : علاقة من المجموعة A حيث $A \neq \varnothing$ الى المجموعة B حيث $B \neq \varnothing$ بحيث أن كل عنصرمن عناصر المجال يقترن أو يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل ضمن قاعدة الأقتران أي:

لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث $(x, y) \in r$

## مثال ( 1 )

لاحظ الشكل :- لتكن A مجموعة طلاب . ولتكن Bمجموعة لغات. والعلاقة r معرفه من A الى B هي علاقة " يدرس " . فاذا كانت :




A = { بلال , عبد الله , مثنى }

B = { انكليزية , فرنسية }

وأن $r : A \longrightarrow B$ ، هل r تمثل تطبيقاً ؟ مع ذكر السبب.


الحل/ r لاتمثل تطبيقاً.

لأن بلال ينتمي الى المجال وقد أرتبط بلغتين في المجال المقابل

## مثال ( 2 )

لتكن $r : A \longrightarrow B$

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{e, f, g\}$

$r = \{(a, e), (b, f), (d, g)\}$

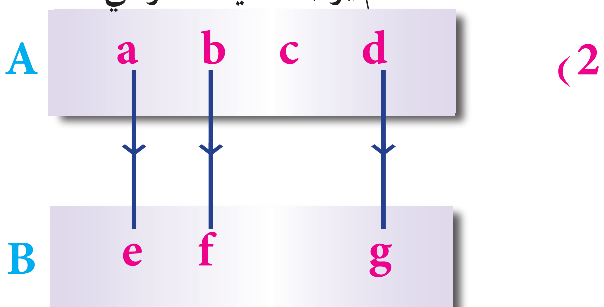
1 ) هل r تمثل تطبيقاً ؟ مع ذكر السبب.

2 ) مثله بمخطط سهمي.

الحل/ 1 ) لاتمثل تطبيقاً.

لأن $c \in A$ لم يرتبط بأي عنصر في المجال المقابل B

2 )



## مثال ( 3 )

اذا كانت $A = \{1, 2, -3\}$

$B = \{2, 3, -2, -4\}$

f تطبيق معرف كالآتي :- $f : A \longrightarrow B$

حيث $x \longrightarrow x + 1$

أولاً : أكتب التطبيق f على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة

ثانياً : مثله بمخطط سهمي

ثالثاً : أوجد مدى التطبيق f

**الحل/**

اولاً :-

$x \longrightarrow x + 1$

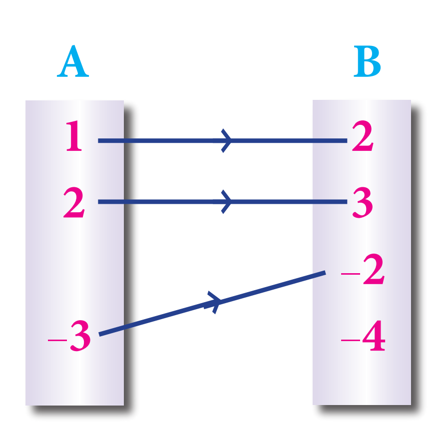
$1 \longrightarrow 1 + 1 = 2$

$2 \longrightarrow 2 + 1 = 3$

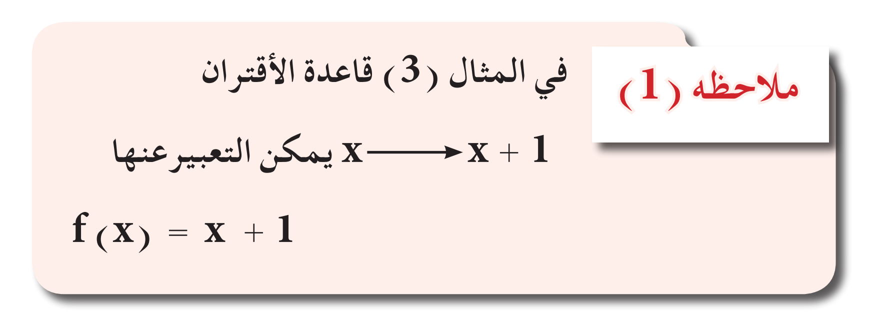
$-3 \longrightarrow -3 + 1 = -2$

$\therefore\ f = \{(1, 2), (2, 3), (-3, -2)\}$

ثانياً : –المخطط السهمي




ثالثاً :– مدى التطبيق $= \{2, 3, -2\}$



**ملاحظه (1)**

في المثال (3) قاعدة الأقتران

$x \longrightarrow x + 1$ يمكن التعبيرعنها

$f(x) = x + 1$

**ملاحظه (2)**

يمكن التعبير عن التطبيق بأحد الحروف.. , $r , f, g$

مع ذكر المجال والمجال المقابل وقاعدة الأقتران.

**ملاحظه (3)**

المخططات السهميه ممكن أن تكون على الصور التالية:

**ملاحظه (4)**

المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل.




اذا كانت $g : A \longrightarrow Q$ حيث Q مجموعة الاعداد النسبية

$A = \{-1 , 1 , 2 , -3\}$

$g(x) = x^2 - 4$

1 ) أوجد مدى التطبيق

2 ) أرسم المخطط السهمي للتطبيق

3 ) أكتب التطبيق بذكر عناصره

**الحل /**

1 ) $g(x) = x^2 - 4$

$g(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$

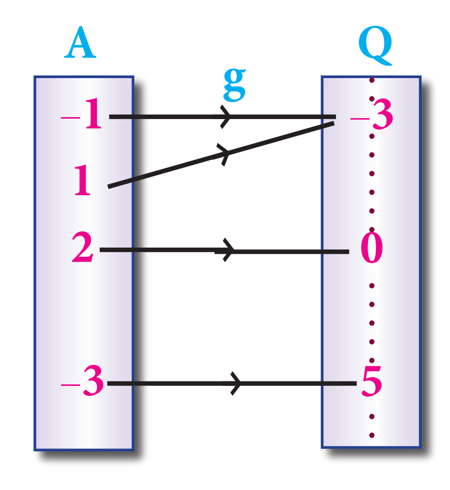
$g(1) = (1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$

$g(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

$g(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

$\therefore$ Range $= \{-3,0,5\}$ المدى

2 )




3 ) $g = \{(-1,-3), (1,-3), (2,0), (-3,5)\}$



## مثال ( 5 )

اذا كانت $A$ مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة الأصغر من 5

وكانت $f : A \longrightarrow Z$ ، حيث $Z$ مجموعة الاعداد الصحيحة

جد مدى التطبيق اذا كان $f(x) = 2x - 3$

**الحل/**

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$f(x) = 2x - 3$

$f(1) = (2)(1) - 3 = -1$

$f(2) = (2)(2) - 3 = 1$

$f(3) = (2)(3) - 3 = 3$

$f(4) = (2)(4) - 3 = 5$

$\therefore$ Range $= \{-1, 1, 3, 5\}$ المدى

## مثال ( 6 )

اذا كان $g(x) = 4x - 7$ فجد قيمة $x$ عندما $g(x) = 10$ مع العلم ان $g : Q \longrightarrow Q$

حيث $Q$ مجموعة الاعداد النسبية .

**الحل/**

$\because g(x) = 4x - 7$

$g(x) = 10$

$\therefore 10 = 4x - 7$

$\Rightarrow 4x = 10 + 7$

$\Rightarrow 4x = 17$ بقسمة طرفي المعادلة على (4)

$\Rightarrow x = \frac{17}{4} \in Q$




س1/ اذا كان $r : A \longrightarrow B$ وكانت $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

1) $r = \{(a, 4), (b, 7), (c, 3)\}$

2) $r = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3)\}$

اولاً: هل r تطبيقاً ولماذا؟ ثانياً: ارسم المخطط السهمي

س2/ اذا كانت A مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأصغر من 7

وكانت B مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر من 8

f علاقة من A الى B حيث $f(x) = x + 1$

أولاً: ارسم المخطط السهمي ثانياً: f يمثل تطبيقاً ، لماذا ؟

س3/ اذا كانت $A = \{1, 2, -2, -3\}$ وكان $g : A \longrightarrow Z$

جد مدى التطبيق اذا كان $g(x) = 5x - 3$ .

س4/ لتكن A مجموعة المناطق الاثرية في العراق . حيث $A =$ {باب عشتار ، الحضر ، الملوية} ولتكن

$B =$ { كركوك ، الموصل ، البصرة ، ذي قار ، صلاح الدين ، بابل ، بغداد } .

وان $r : A \longrightarrow B$ انسب المناطق الاثرية لكل محافظة عراقية بمخطط سهمي تختاره.

س5 / اذا كان $f: N \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 2x + 8$

اولاً : اكتب مدى التطبيق .

ثانياً : اذا كان $f(x) = 16$ فجد قيمة $x$ .

ثالثاً : اكتب مجموعة الازواج المرتبة التي تمثل التطبيق.

س6 / اذا كانت $r = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d),(5,a)\}$

حيث $r: A \longrightarrow B$

1) جد كلاً من $B, A$ .

2) أكتب مدى التطبيق.

3) ارسم المخطط السهمي.

س7 / اذا كان $f: A \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 2x^2 - x + 3$

وإن $A = \{1, -1, 0\}$

1) اكتب المدى.

2) اكتب مجموعة الأزواج المرتبة التي تمثل التطبيق.

3) ارسم المخطط السهمي.

# 2 – 1 نوع التطبيق

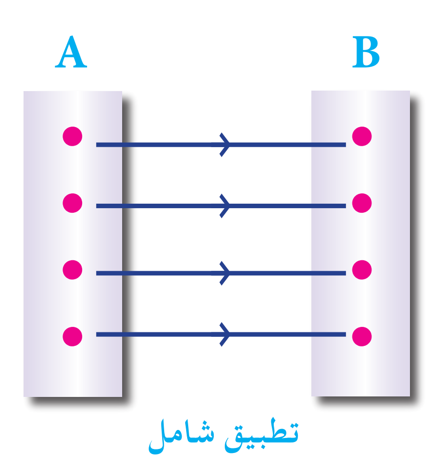
## اولاً: التطبيق الشامل (Surjective Mapping)

$r : A \longrightarrow B$ تكون تطبيقاً شاملاً اذا حقق :

كل عنصر من عناصر المجموعة B هو صورة لعنصر واحد أو اكثر من عناصر المجموعة A

اي ان : المدى = المجال المقابل

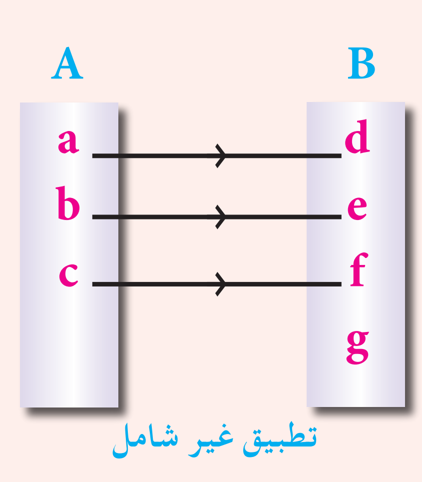
لاحظ الشكل المجاور .




تطبيق شامل

ملاحظه

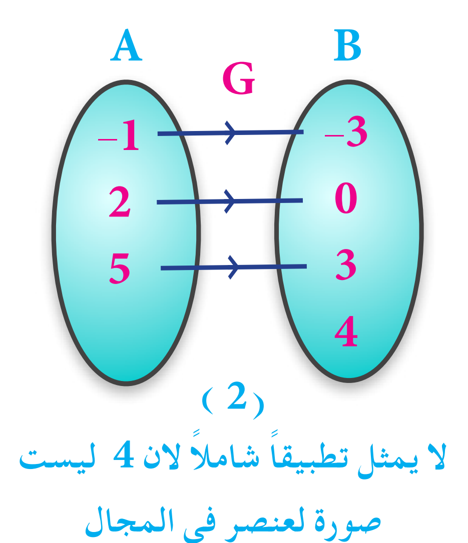
يكون التطبيق غير شاملٍ اذا وجد عنصر من عناصر المجال المقابل ليس صورة لاي عنصر من عناصر المجال . كما في الشكل المجاور .




تطبيق غير شامل

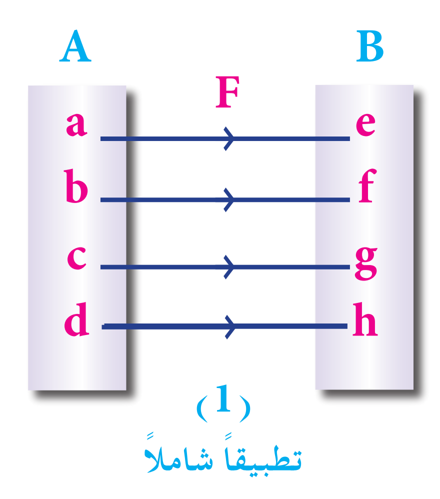



حدد اياً من المخططات السهمية الاتية تمثل تطبيقاً شاملاً؟



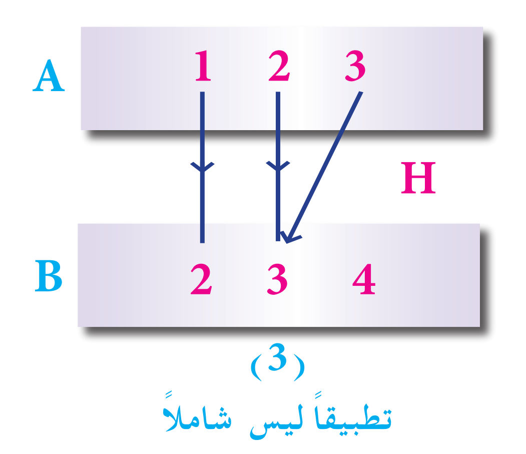

( 2 )

لا يمثل تطبيقاً شاملاً لان 4 ليست صورة لعنصر في المجال




( 1 )

تطبيقاً شاملاً




( 3 )

تطبيقاً ليس شاملاً

## مثال ( 2 )

ليكن $f : A \longrightarrow B$ حيث $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ , $B = \{4, 6, 8, 10\}$

وان $f = \{(11, 4), (9, 10), (7, 8), (5, 6), (3, 4)\}$ ، هل f تطبيقاً شاملاً؟

**الحل/** المدى $\{4, 6, 8, 10\}$

بما ان المدى = المجال المقابل B

$\therefore$ f يمثل تطبيقاً شاملاً .

## مثال ( 3 )

$N \longleftarrow A : f$ حيث $A = \{-1, -2, 1, 2\}$ ، $x \longrightarrow x^2 + 1$ ، هل f تطبيق شامل ؟

### الحل/

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$

$\therefore$ المدى $Range = \{2, 5\}$

المدى $\neq$ المجال المقابل N

$\therefore$ f تطبيق غير شامل

## مثال ( 4 )

$f(x) = 3x + 2$ ، $f : N \longrightarrow N$ بين هل التطبيق f شامل ؟

### الحل/

$f(x) = 3x + 2$

$f(0) = 3(0) + 2 = 2$

$f(1) = 3(1) + 2 = 5$

$f(2) = 3(2) + 2 = 8$

$f(3) = 3(3) + 2 = 11$

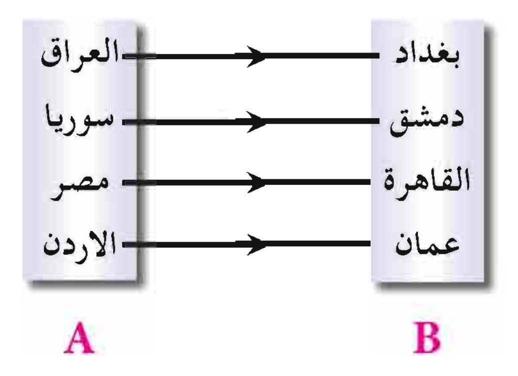
$\therefore$ المدى $Range = \{2, 5, 8, 11, ....\}$

f ليس شاملاً

لان المدى $\neq$ المجال المقابل N

## ثانياً : التطبيق المتباين Injective Mapping

لتكن A مجموعة الدول العربية المتمثلة بـ { العراق ، سوريا ، مصر ، الاردن } ولتكن B مجموعة عواصم هذه الدول المتمثلة بـ { بغداد ، دمشق ، القاهرة ، عمان } والعلاقة مبينة كما في المخطط السهمي :




لاحظ ان كل دولة عربية في المجموعة A أرتبطت بمدينة واحدة في المجموعة B والتي تمثل عاصمتها كما في الشكل اعلاه ان مثل هذا التطبيق يسمى تطبيقاً متبايناً ، اذن يكون التطبيق متبايناً اذا تحقق :

$$\forall x_1, x_2 \in A \ , x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أي أن :

لأي عنصرين مختلفين في المجال لهما صورتان مختلفتان في المجال المقابل .

**ملاحظه** يكون التطبيق غير متباين اذا وجد عنصران مختلفان من عناصر المجال لهما نفس الصورة في المجال المقابل .

أي أن :

$$\exists x_1, x_2 \in A \ , x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

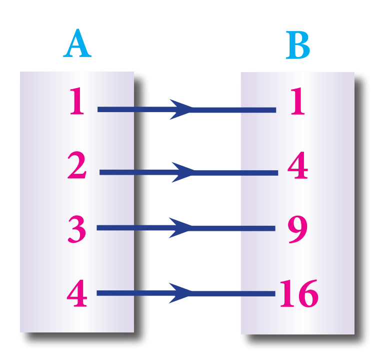
## مثال ( 5 )

بين أي التطبيقات الاتية متباينة ثم ارسم المخطط السهمي لها .

1 ) اذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 4, 9, 16\}$ واذا كان $f : A \longrightarrow B$

حيث $f(x) = x^2$ .

**الحل/**




$f(x) = x^2$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$f(3) = (3)^2 = 9$

$f(4) = (4)^2 = 16$

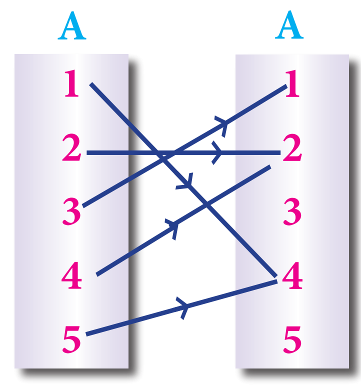
$\therefore \quad f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$

$\therefore$ f متباين لانه لكل عنصرين مختلفين من المجال لهما صورتان مختلفتان في المجال المقابل .

2 ) اذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وكان $g : A \longrightarrow A$ تطبيقاً معرفاً كالاتي

$g = \{(1, 4), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 4)\}$

**الحل/**




التطبيق غير متباين لان $4 \neq 2$ بينما $g(2) = g(4) = 2$ وكذلك

$1 \neq 5$ بينما $g(1) = g(5) = 4$

3 ) اذا كان $f : N^{+} \longrightarrow N$ حيث ان $f(x) = 3x$

**الحل/**

المجال $N^{+}$ : 1 , 2 , 3 , 4.....

المجال المقابل $N$ : 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , ....

$f(x) = 3x$

$f(1) = 3$

$f(2) = 6$

$f(3) = 9$

التطبيق متباين لان كل عنصرين مختلفين في المجال لهما صورتان مختلفتان في المجال المقابل .

لاحظ ان المجال والمجال المقابل مجموعتان غير منتهيتين .

### مثال ( 6 )

اذا كانت $A = \{ -1, 2, 3, 1 \}$ و $B = \{2, 5, 10\}$ وكان $f : A \longrightarrow B$

$f(x) = x^2 + 1$ . هل $f(x)$ متباين؟

**الحل /** التطبيق غير متباين لأن $1 \neq -1$ بينما $f(1) = f(-1) = 2$

## ثالثاً : التطبيق تقابل Bijective Mapping

يكون التطبيق تقابلاً اذا حقق الشرطين الآتيين :-

1) التطبيق شاملاً .

2) التطبيق متبايناً .

### مثال ( 7 )

اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ , $B = \{0, 2, 3, 8\}$

$f : A \longrightarrow B$ بحيث $f(x) = x^2 - 1$ جد 1) المدى , 2) اذكر نوع التطبيق f

3) ارسم المخطط السهمي للتطبيق

**الحل /** 1)

$f(x) = x^2 - 1$

$f(1) = (1)^2 - 1 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 3$

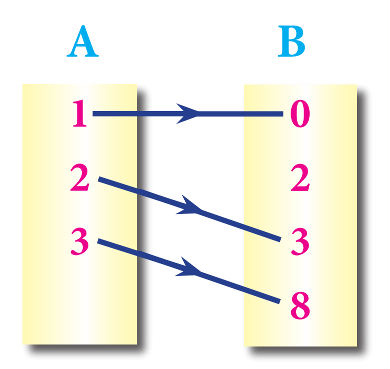
$f(3) = (3)^2 - 1 = 8$

$\therefore$ Range $= \{0, 3, 8\}$ المدى

2) التطبيق غير شامل لان 2 ليس صورة لعنصر في المجال او المدى ≠ المجال المقابل

التطبيق متبايناً ، ليس تقابلاً لانه ليس شاملاً .

3) المخطط السهمي




## مثال (8)

اذا كانت $f : Z \longrightarrow Z$ ، حيث $f(x) = 2x^2 - 3$ بين نوع التطبيق f حيث Z مجموعة الاعداد الصحيحة .

**الحل/**

$$f(x) = 2x^2 - 3$$

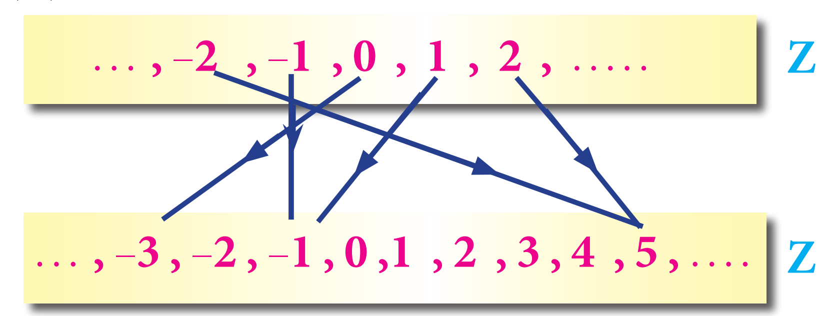
$$\therefore f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$f(0) = 2(0)^2 - 3 = -3$$

$$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

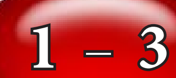



اولاً : التطبيق ليس شاملاً لان المدى ≠ المجال المقابل

ثانياً : التطبيق ليس متبايناً لان $f(-1) = f(1) = -1$ بينما $1 \neq -1$

ثالثاً : التطبيق ليس تقابلاً .

**ملاحظة** لايمكن رسم مخطط كامل لهذا التطبيق لان Z مجموعة غير منتهية



# 1 – 3 المخطط البياني للتطبيق

في الامثلة السابقة مثلنا التطبيقات على شكل مخططات سهمية .

مثلاً عندما كان $B \longrightarrow A : r$ تطبيقاً

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3\ 4, 5\}$

حيث $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

فأن المخطط السهمي للعلاقة r هو

A → B

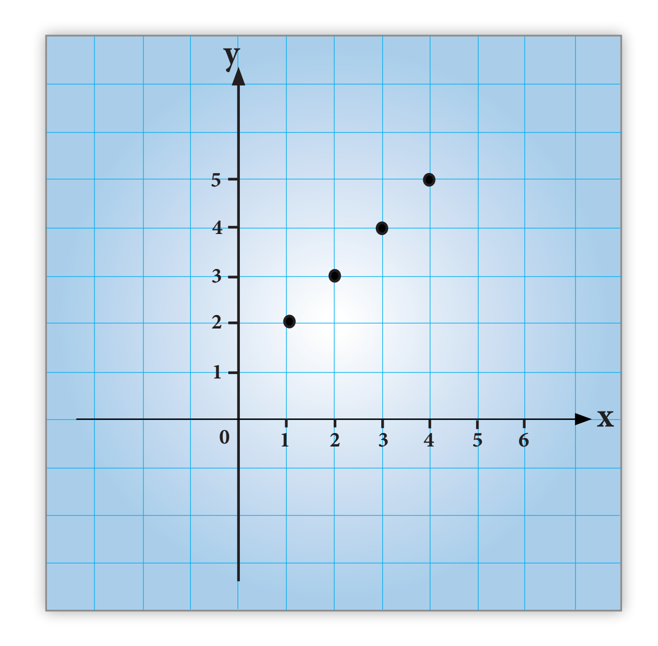
1 → 2

2 → 3

3 → 4

4 → 5

ويمكن ايضاً تمثيل العلاقة r من خلال الازواج المرتبة بمخطط بياني كما في الشكل .






اذا كان $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 5, 2\}$

$r : A \longrightarrow B$

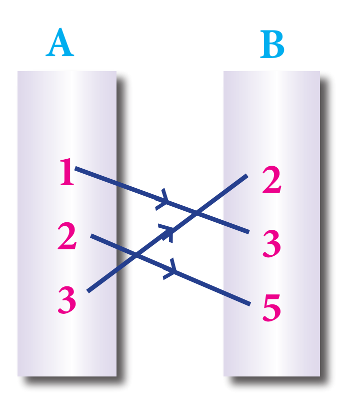
حيث $r = \{(1, 3), (2, 5), (3, 2)\}$

1) إرسم المخطط السهمي للتطبيق.

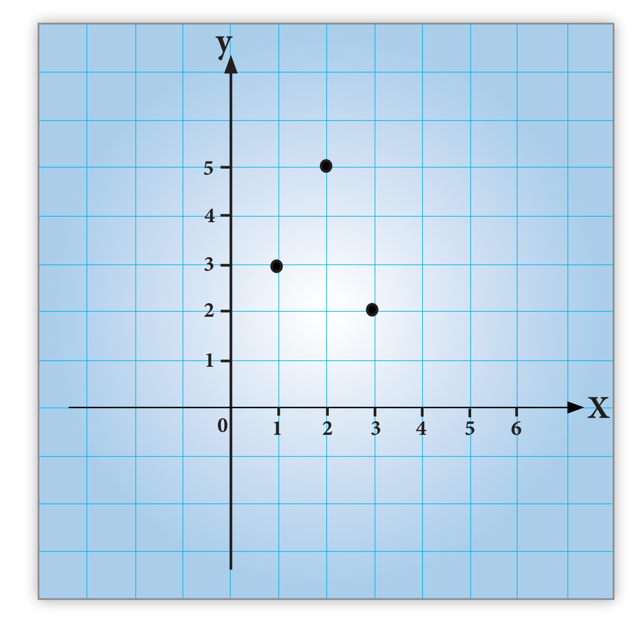
2) إرسم المخطط البياني للتطبيق .

3) بين نوع التطبيق .

**الحل/** (1) بمخطط سهمي




(2) المخطط البياني




(3) التطبيق ( شامل، متباين ، تقابل )

## مثال ( 2 )

اذا كان $f : A \longrightarrow B$

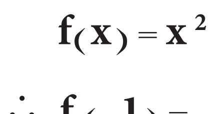
$A = \{-1 , 2 , -2\}$

$B = \{1 , 4\}$

وكانت $f_{(x)} = x^2$

أرسم المخطط البياني للتطبيق وبين نوعه

### الحل /



$f_{(x)} = x^2$

$\therefore f_{(-1)} = (-1)^2 = 1$

$f_{(2)} = (2)^2 = 4$

$f_{(-2)} = (-2)^2 = 4$

$f = \{(-1 , 1) , (2 , 4) , (-2 , 4)\}$

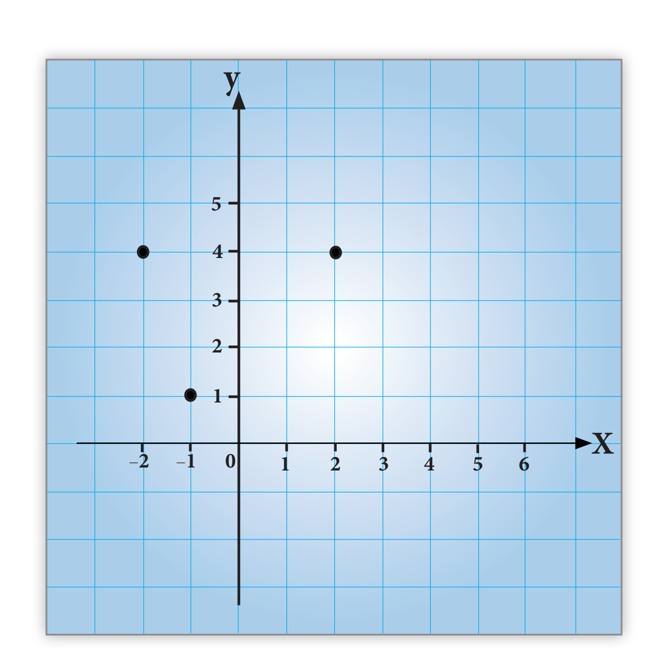
المدى = $\{1 , 4\}$

التطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل

التطبيق ليس متباينا لأن

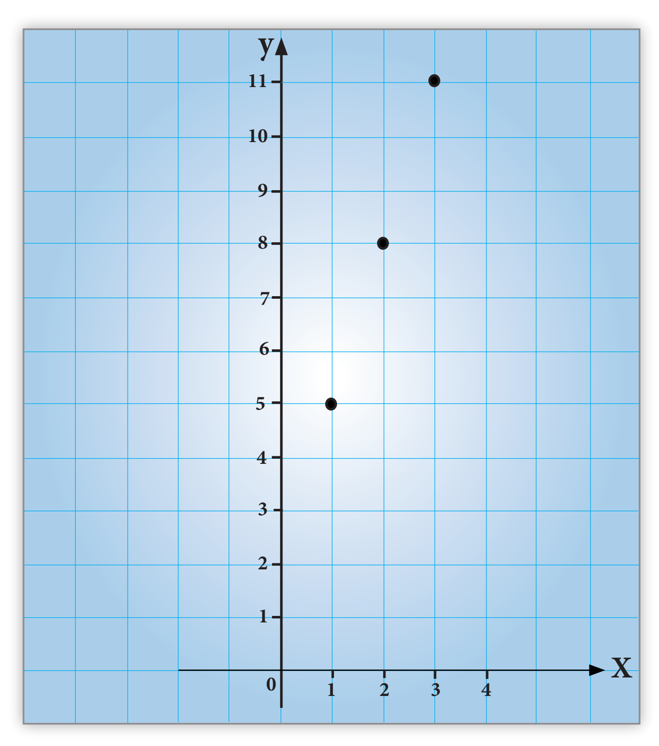
$2 \neq -2 \Rightarrow f_{(2)} = f_{(-2)}$

التطبيق ليس تقابلاً لانه ليس متبايناً



## مثال ( 3 )

اذا كان $r : A \longrightarrow \{2, 5, 8, 11\}$ ممثلة بالمخطط البياني :




جد :

1) $r, A$ 2) المدى 3) بين نوع التطبيق .

**الحل /** (1) $A = \{1,2,3\}$

من المخطط البياني نجد العلاقة r

$$r = \{(1,5),(2,8),(3,11)\}$$

(2) المدى = $\{8, 5, 11\}$

(3) التطبيق ليس شاملاً لان المدى ≠ المجال المقابل

التطبيق متباين

التطبيق ليس تقابلاً لانه ليس شاملاً

# تركيب التطبيقات 1 – 4

# Composition of Mappings

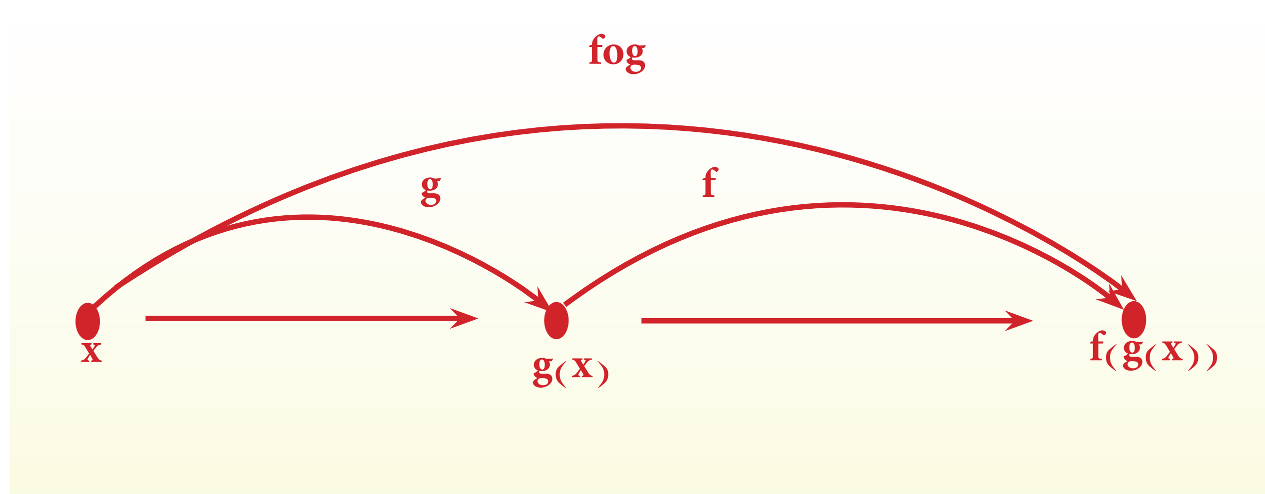
## تركيب التطبيقات :

تعرفنا في هذا الفصل على تعريف التطبيق وانواعه وكيفية إيجاد صور عناصر المجال بتأثير قاعدة الإقتران، مثلاً : إذا كانت $f:Q \to Q$ حيث $f(x) = x^2+1$ فأن $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ .

والآن سوف نتعرف على نوع آخر من التطبيقات ناتج من تركيب تطبيقين معلومين، **f** ، **g** نوضحه بالتعريف الآتي :

**تعريف /**

ليكن كل من **f** ، **g** تطبيقاً ، **x** عنصراً في مجال **g** فأن صورة **x** بتأثير التطبيق **g** هي $g(x)$ وأن صورة العنصر الجديد $g(x)$ بتأثير التطبيق **f** هي $f(g(x))$ يسمى هذا التطبيق الجديد (( تركيب التطبيقين **g** ، **f** )) ويوضحه المخطط التالي :




سوف نرمز لـ $f(g(x))$ بالرمز (**fog**)

أي أن : $(fog)(x) = f(g(x))$ وأن قراءة (**fog**) هي **f** تركيب **g** .

عند إيجاد التركيب الآخر (**gof**) فأنه يقرأ **g** تركيب **f** :

اي ان : $(gof)(x) = g(f(x))$

## كيف نجد $f(g(x))$

* نجد أولاً صورة x في قاعدة إقتران التطبيق g أي $g(x)$ .
* ثم نجد صورة $g(x)$ في قاعدة إقتران التطبيق f أي $f(g(x))$ .

### أمثلة محلولة :

#### مثال ( 1 )

ليكن $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow N$ حيث $f(x) = 4x + 3$ وان $g: N \longrightarrow N$
حيث $g(x) = x + 1$ والمطلوب ايجاد مدى gof .

لاحظ المخطط :

$x = 1 \rightarrow$ $f(1) = 4(1) + 3 = 7$ $\xrightarrow{f(1)=7}$ $g(7) = 7 + 1 = 8$ $\rightarrow g(f(1)) = 8$

$x = 2 \rightarrow$ $f(2) = 4(2) + 3 = 11$ $\xrightarrow{f(2)=11}$ $g(11) = 11 + 1 = 12$ $\rightarrow g(f(2)) = 12$

$x = 3 \rightarrow$ $f(3) = 4(3) + 3 = 15$ $\xrightarrow{f(3)=15}$ $g(15) = 15 + 1 = 16$ $\rightarrow g(f(3)) = 16$

$\therefore$ مدى ( gof ) $= \{8, 12, 16\}$

## مثال ( 2 )

اذا كان $f : N \longrightarrow N \ , f(x) = 2x + 1$

$g : N \longrightarrow N \ , g(x) = x^2$

جد اولاً: $f(1) , g(1)$

ثانياً : $(fog)(3) , (gof)(3)$ ماذا تلاحظ ؟

**الحل/**

اولاً : $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 1$

$f(1) = 3$

$g(x) = x^2 \Rightarrow g(1) = (1)^2$

$g(1) = 1$

ثانياً : لنجد

$(gof)(3)$

$(gof)(3) = g(f(3))$

$= g(2(3)+1)$

$= g(7)$

$= (7)^2$

$= 49$

$(fog)(3)$

$(fog)(3) = f(g(3))$

$= f(3^2)$

$= f(9)$

$= 2(9) + 1$

$= 19$

لاحظ ان $(fog)(3) \neq (gof)(3)$

## مثال ( 3 )

اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$

$g : A \longrightarrow A$

وكان

$f : A \longrightarrow A$

$f = \{(1,3), (3,3), (2,3)\}$

$g = \{(3,1), (1,2), (2,3)\}$

جد $gof , fog$



الحل/

اولاً / نجد fog

$(fog)(1) = f(g(1)) = f(2) = 3$

$(fog)(2) = f(g(2)) = f(3) = 3$

$(fog)(3) = f(g(3)) = f(1) = 3$

$\therefore \; fog = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$

ثانياً / نجد gof

$(gof)(1) = g(f(1)) = g(3) = 1$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = 1$

$(gof)(3) = g(f(3)) = g(3) = 1$

$\therefore \; gof = \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$

ماذا تلاحظ ؟

## مثال (4)

$f : Z \longrightarrow Z \;, x \in Z, x \longrightarrow 3x + 1$

$g : Z \longrightarrow Z \;, x \in Z, x \longrightarrow 2x + 5$

جد قيمة x اذا كان $(fog)(x) = 28$

الحل/

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x + 5)$

$= 3(2x + 5) + 1$

$= 6x + 15 + 1$

$= 6x + 16$

$\because \; (fog)(x) = 28$

$\therefore \; 6x + 16 = 28$

$6x = 28 - 16$

$6x = 12 \Rightarrow x = 2$




س1 / اذا كان $g : Z \longrightarrow N$ حيث $g(x) = x^2 + 3$

* اكتب g بذكر عناصرها على شكل ازواج مرتبة .

* اكتب المدى .

* بين نوع التطبيق .

س2 / اذا كان $f : N \longrightarrow N$ حيث $f(x) = 5x + 2$

$g : N \longrightarrow N$ حيث $g(x) = x + 3$

* اكتب fog بذكر الازواج المرتبة .

* مدى fog .

* بين نوع التطبيق fog .

س3 / اذا كان $f : Q \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 6x - 1$

$g : Q \longrightarrow Q$ حيث $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

جد قيمة x اذا علمت ان $(fog)(x) = 17$ .

س 4/ اذا كان $f: Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = x^3$

$g: Z \longrightarrow Z$ حيث $g(x) = 7$

فأن : * $(fog)(-1)$ يساوي : $7$ ، $-7$ ، $343$ ، $-49$

* $(gof)(-1)$ يساوي : $7$ ، $-7$ ، $-1$ ، $1$

س 5/ اذا كان $f: Q \longrightarrow Q$ حيث $f(x) = 3x + 4$

$g: Q \longrightarrow Q$ حيث $g(x) = 1-2x$

* جد $(fog)(3)$ ، $(gog)(x)$

* اذا كان $(gof)(x) = -43$ فجد قيمة $x$ .

س 6/ اذا كان $f: \{1, 2, 3, \dots\} \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = 4x - 3$

1) اكتب مدى التطبيق .

2) بيان التطبيق $f$ بذكر عناصره .

3) نوع التطبيق.

4) اذا كان $f(x) = 53$ جد قيمة $x$ .

5) اذا كان $(f o f)(x) = 1$ جد قيمة $x$ .

# 2 الفصل الثاني

# الأعداد الحقيقية

# Real Numbers

[2 – 1] الحاجة الى المزيد من الاعداد .

[2 – 2] خواص الاعداد الحقيقية .

[2 – 3] الجذور التربيعية .

[2 – 4] الجذور التكعيبية .

| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
| --- | --- |
| الاعداد الحقيقية | R |
| الاعداد النسبية | Q |
| الاعداد غير النسبية | H |
| الجذر التربيعي | $\sqrt{\ }$ |
| الجذر التكعيبي | $\sqrt[3]{\ }$ |

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

$\sqrt[3]{a.b} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$

الفصل 2

# 2 - 1 الحاجة الى مزيد من الاعداد

تعرفنا في مراحل سابقة من دراستنا على مجموعات اساسية هي :

1 . مجموعة الاعداد الطبيعية ( Natural Numbers ) $N = \{0, 1, 2, 3, 4, ....\}$ .

2 . مجموعة الاعداد الصحيحة ( Ingteres ) $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$

3 . مجموعة الاعداد النسبية ( Rational Numbers ) $Q = \{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \}$

ولاحظنا ان كل مجموعة منها تحوي المجموعة التي قبلها وقد مكننا ذلك من حل بعض المعادلات والمسائل فمثلاً المعادلة ( $x + 2 = 0$ ) ليست لها حل في ( N ) لان قيمة ( $x = -2$ ) حيث $-2 \notin N$

لذلك وسعت ( N ) لتصبح Z قادرة على حل هذه المعادلة وامثالها لانها تحوي اعداداً سالبة .

كذلك المعادلة ( $2y - 3 = 0$ ) ليست لها حل في Z لان قيمة $y = \frac{3}{2}$ ، $\frac{3}{2} \notin Z$ هكذا

اوجدت المجموعة ( Q ) لتوفر حلاً لاية معادلة بالصورة ( $ax + b = 0, a \neq 0$ ) حيث مجموعة الحل $\{-\frac{b}{a}\}$.

لكن هناك العديد من المعادلات والمسائل لا تستطيع حلها في Q مثلاً المعادلة ( $x^2 = 3$ ) لانه لايوجد عدد نسبي مربعه ( 3 ) . لذلك دعت الحاجة الى مجموعة جديدة من الاعداد سُميت ( مجموعة الاعداد الحقيقية Real Numbers ) ويرمز لها ( R ) لنستطيع من خلالها حل الكثير من المعادلات والمسائل.

واضح ان : $N \subset Z \subset Q \subset R$

## 4. الاعداد غير النسبية Irrational Numbers (H)

من كل ما سبق توضحت الحاجة الى اعداد ليست على الشكل $\{14 . 4 , 7 , \frac{2}{3} , \frac{1}{5}\}$

(اي لا يمكن وضعها بالصورة $\frac{a}{b}$ حيث $a , b$ اعداد صحيحة ، $b \neq 0$ ) .

وفي المرحلة السابقة تعرفنا مفصلاً على اعداد نسبية سميت مربعات كاملة ( اي انها مربعات الاعداد نسبية) وصورتها ( $B^2$ ) حيث $B \in Q$ .

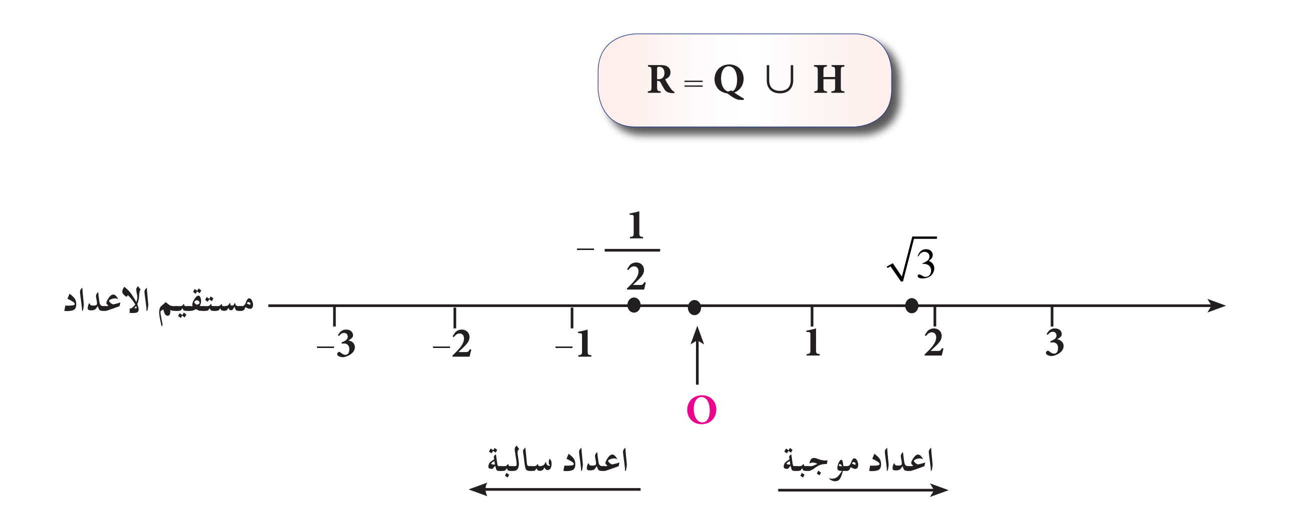
مثلاً : $4 = 2^2$ , $25 = 5^2$ .

والجذور التربيعية لهذه الاعداد هي اعداد نسبية $\sqrt{4} = 2$ , $\sqrt{25} = 5$ , $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$ .. الخ .

اما الاعداد النسبية التي ليست مربعات كاملة مثلاً 2 ، 3 ، 5 تكون جذورها التربيعية اعداداً ليست نسبية ( $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$...) كذلك الاعداد النسبية ( المكعبات الكاملة ) كالاعداد 8 ، 27 ، 1000 تكون جذورها التكعيبية اعداد نسبية . $\sqrt[3]{8} = 2$ , $\sqrt[3]{27} = 3$ , $\sqrt[3]{1000} = 10$

والاعداد الاخرى مثلاً : تكون جذورها التكعيبية ليست نسبية $\sqrt[3]{2}$ , $\sqrt[3]{3}$ , $\sqrt[3]{5}$ وان اتحاد المجموعتين "الاعداد النسبية Q والاعداد غير النسبية H " يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية R .

$$R = Q \cup H$$



# 2 – 2 خواص الاعداد الحقيقية

## [1 – 2 – 2] خاصية الترتيب Order Property

تُعتبر هذه الخاصية من الخواص المهمة لمجموعة الاعداد الحقيقية وتتضمن ما يلي :

1. اذا كان $a \in R$ فان واحدة فقط من الحالات الاتية صائبة :

$a > 0$ , $a = 0$ (عدد موجب) يقع على يمين الصفر على خط الاعداد

$a < 0$ (عدد سالب) يقع على يسار الصفر على خط الاعداد



2. اذا كان $a , b \in R$ فان واحدة فقط من هذه العلاقات تتحقق :

$a = b$ , $a > b$ , $a < b$

## [2 – 2 – 2] خواص بعض العمليات على الاعداد الحقيقية

اولاً الجمع والضرب لكل $a , b , c \in R$

| الخاصية Property | الجمع Addition | الضرب Multiplication |
|---|---|---|
| الانغلاق clousre | $a + b \in R$ | $a . b \in R$ |
| الابدالية Commutativity | $a + b = b + a$ | $a . b = b . a$ |
| التجميعية Associativity | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(a . b) . c = a . (b . c)$ |
| العنصر المحايد Idetity Element | $a + 0 = 0 + a = a$<br>العنصر المحايد هو 0 | $a . 1 = 1 . a = a$<br>العنصر المحايد هو 1 |
| النظير Inverse | النظير الجمعي Additive Inverse<br>$a + (-a) = (-a) + a = 0$ | النظير الضربي Multiplicative Inverse<br>النظير الضربي للعدد a , $a \neq 0$<br>هو $\frac{1}{a}$ حيث<br>$a . (\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}) . a = 1$ |

## ثانياً الطرح والقسمة

الطرح: يعرف بالشكل الاتي : $a - b = a + (-b)$ اي طرح b من a يعني . جمع a مع النظير الجمعي للعدد b.

القسمة: تعرف بالشكل الاتي : $a \div b = a . \frac{1}{b} , b \neq 0$ اي قسمة a على b تعني حاصل ضرب العدد a في النظير الضربي للعدد b شرط ان $b \neq 0$

## ثالثاً توزيع عملية الضرب على الجمع والطرح Distributive property

لكل $a , b , c \in R$

$$a . ( b + c ) = ( a . b ) + ( a . c )$$

$$a . ( b - c ) = ( a . b ) - ( a . c )$$

## رابعاً تطبيق قواعد ضرب الاشارات نفسها كما درستها سابقاً اي:

1) $-(-a) = a$

2) $a(-b) = -(ab)$

3) $(-a)(-b) = ab$

## خامساً لكل

$$\frac{a}{b} = \frac{a . c}{b . c} , \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} \quad , a , b , c \in R$$

$$b \neq 0 , c \neq 0$$

## سادساً اذا كان:

$a . b = 0$ فان $a = 0$ او $b = 0$ او كلاهما ( خاصية العامل الصفري ) Zero Factor Property



# 2 – 3 الجذور التربيعية

سبق ان تعلمت بانه اذا كانت (a) عدداً حقيقياً ليس سالباً ( $a \geq 0$ ) فاي عدد مربعه (a) يسمى جذراً تربيعياً للعدد (a) ويرمز له $\sqrt{a}$ .

**مثلاً /** العدد 2 جذراً تربيعياً للعدد 4 ($\sqrt{4} = 2$) لان $2^2 = 4$ ،

$\frac{3}{4}$ جذراً تربيعياً للعدد $\frac{9}{16}$ حيث $\left(\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}\right)$ .

**تعريف (2-1)**

لتكن $a \in R$ , $a \geq 0$ فان $\sqrt{a} = b$ حيث b عدداً حقيقياً ليس سالباً مربعه a أي ان $b^2 = a$ .

مثلاً : اذا كانت $\sqrt{a} = 3$ فان $a = 3^2 = 9$ ، كذلك : $\sqrt{a} = \frac{3}{4}$ فان $a = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

ومن خواص الجذور :

1 – اذا كانت $a , b \in R$ فان : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$ والعكس صحيح حيث $b \geq 0 , a \geq 0$

**مثلاً /** $\sqrt{15} = \sqrt{5} . \sqrt{3}$ كذلك : $\sqrt{7} . \sqrt{3} = \sqrt{21}$

2 – $a \geq 0 , b > 0$ و $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ والعكس صحيح مثلاً $\frac{3}{5} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}}$

وكذلك $\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

3 – $a = \sqrt{a} . \sqrt{a}$ , $a \geq 0$ والعكس صحيح $\sqrt{8} . \sqrt{8} = 8$ ، $\sqrt{10} . \sqrt{10} = 10$

## مثال ( 1 )

ضع في ابسط صورة :

a) $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-6\sqrt{5}=\sqrt{5}\,(3+2-6)=\sqrt{5}\,(-1)=-\sqrt{5}$

b) $4\left(\sqrt{3}+1\right)+3\left(\sqrt{3}-1\right)$

$=4\sqrt{3}+4+3\sqrt{3}-3=7\sqrt{3}+1$

c) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2, a\geq 0\ , b\geq 0$

$=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

d) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+5\right)-2\left(1-3\sqrt{2}\right)$

$=\sqrt{2}.\sqrt{2}+5\sqrt{2}-2+6\sqrt{2}$

$=2+5\sqrt{2}-2+6\sqrt{2}$

$=(2-2)+(5+6)\sqrt{2}=0+11\sqrt{2}$

$=11\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{7}+2\right)\left(3+\sqrt{7}\right)$

$=3\sqrt{7}+\sqrt{7}.\sqrt{7}+6+2\sqrt{7}$

$=3\sqrt{7}+7+6+2\sqrt{7}$

$=(3+2)\sqrt{7}+13=5\sqrt{7}+13$

f) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

$=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

$=\left(\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}.\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}.\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)$

$=5-\sqrt{5\times 2}-\sqrt{2\times 5}+2$

$=5-\sqrt{10}-\sqrt{10}+2=7-2\sqrt{10}$

يمكن حل (f) مباشرةً كما في الفرع (c)

## مثال (2)

ضع في ابسط صورة كلاً ممماياتي :

a) $3\sqrt{8}+2\sqrt{50}-\sqrt{32}$

b) $\sqrt{125}-\sqrt{20}-4\sqrt{45}$

الحل / (a)

$$3\sqrt{8}+2\sqrt{50}-\sqrt{32}$$
$$=3\sqrt{4\times 2}+2\sqrt{25\times 2}-\sqrt{16\times 2}$$
$$=3\sqrt{4}.\sqrt{2}+2\sqrt{25}.\sqrt{2}-\sqrt{16}.\sqrt{2}$$
$$=3\times 2\sqrt{2}+2\times 5\sqrt{2}-4\sqrt{2}$$
$$=6\sqrt{2}+10\sqrt{2}-4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$

الحل / (b)

$$\sqrt{125}-\sqrt{20}-4\sqrt{45}$$
$$=\sqrt{(25)(5)}-\sqrt{(4)(5)}-4\sqrt{(9)(5)}$$
$$=\sqrt{25}.\sqrt{5}-\sqrt{4}.\sqrt{5}-4\sqrt{9}.\sqrt{5}$$
$$=5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-12\sqrt{5}$$
$$=-9\sqrt{5}$$

## مثال (3)

اكتب الاعداد $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{5}}-$ بحيث يكون المقام عدداً نسبياً .

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ بضرب البسط والمقام في $\sqrt{2}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ بضرب البسط والمقام في $\sqrt{3}$

$$\frac{-4}{\sqrt{5}}=\frac{-4}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{-4\sqrt{5}}{5}$$ بضرب البسط والمقام في $\sqrt{5}$

## مثال ( 4 )

اختصر في ابسط صورة

$$\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{25}{12}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{12}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{(4)(3)}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{5}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{6}=\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{6}=\frac{0}{6}=0$$

## مثال ( 5 )

في الشكل المجاور: A B C مثلث قائم الزاوية في B:

$AB=3\sqrt{2}$ cm , $BC=\sqrt{6}$ cm جد طول AC .

وما مساحة المثلث ؟

A

$3\sqrt{2}$cm

B C

$\sqrt{6}$ cm

### الحل /

مبرهنة فيثاغورس

$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$$

$$=\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2$$

$$(AC)^2=9\times 2+6$$

$$\therefore (AC)^2=24$$

$$AC=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\ \text{cm}$$

مساحة المثلث $=\frac{1}{2}\times(AB)(BC)$

$$=\frac{1}{2}\times\left(3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2\times 6}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{4\times 3}$$

$$=3\sqrt{3}$$

∴المساحة = $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$




س1 / ضع كلاً مما يأتي في ابسط صورة :

a) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{7} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{7}$

س2 / ضع كلاً مما يأتي في ابسط صورة :

a) $3\sqrt{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{3})$

b) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})$

c) $(4\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$

d) $\left(1-\sqrt{2}\right)^3$

e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

س3 / بين صحة او خطأ العبارات الاتية:

a) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

c) $\left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$

d) $\sqrt{12} = 2\sqrt{6}$

س4 / جد $a^2$ , حيث $\frac{a^2}{b}$ , $a^2b$ , $b \neq 0$ في كل مما يأتي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً :

a) $a = 2\sqrt{2}$ , $b = \sqrt{3}$

b) $a = -4\sqrt{3}$ , $b = -\sqrt{2}$

c) $a = \sqrt{2} - 2$ , $b = \sqrt{3}$

س5 / اختصر المقادير الاتية :-

a) $\sqrt{48} - 3\sqrt{75} - 2\sqrt{12}$

b) $\sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{\frac{1}{5}}$

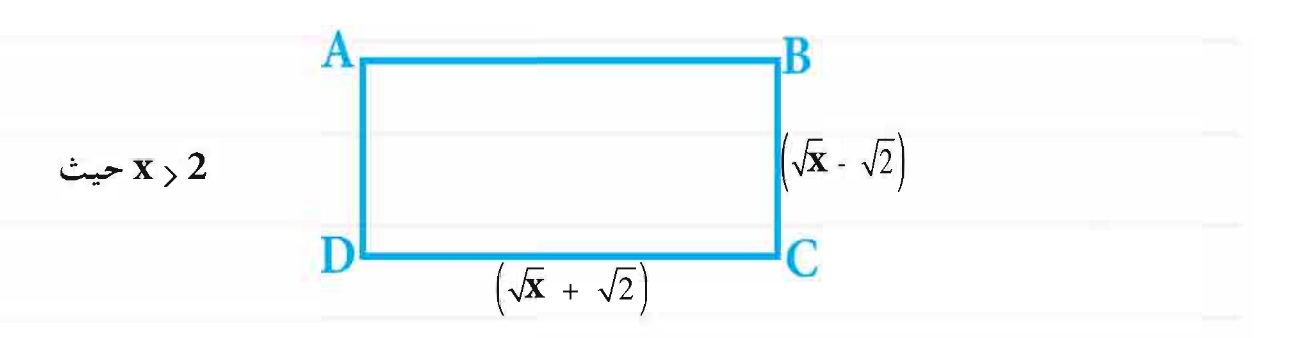
c) $2\sqrt{63} - 7\sqrt{\frac{1}{7}} - 3\sqrt{28}$

d) $5\sqrt{\frac{3}{10}} + 2\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{\frac{15}{32}}$

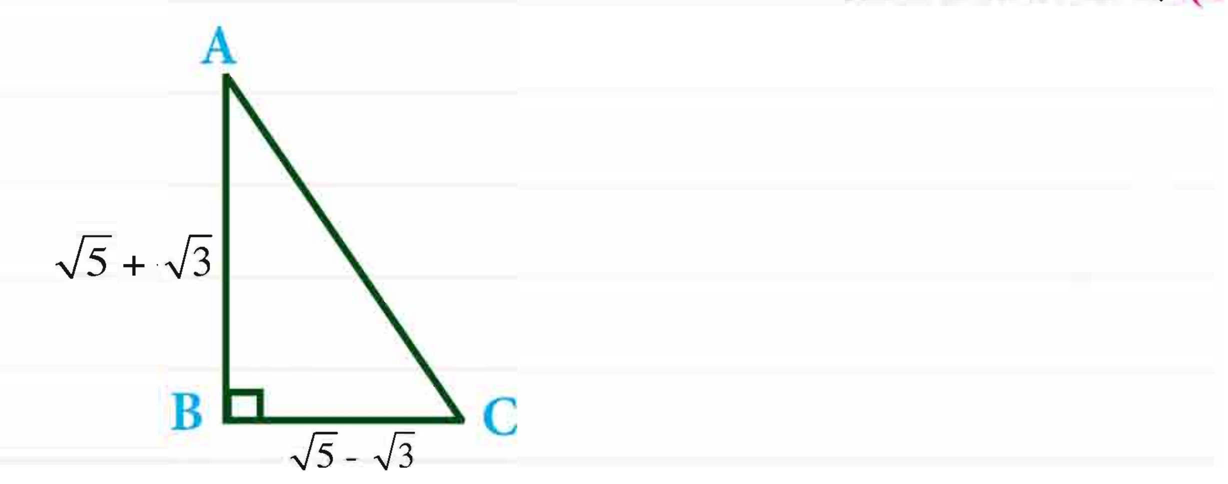
س6 / a ) جد قيمة المقدار الاتي : $4x^2 - 2x + 5$ اذا كانت قيمة x هي :

$$\sqrt{5} \; , \; 1 - \sqrt{2} \; , \; \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

b) جد قيمة x في الشكل المجاور اذا كانت مساحة المستطيل ABCD تساوي $14\ cm^2$




c) جد مساحة المثلث ABC





# 2 – 4 الجذور التكعيبية

اذا كان $R \ni a$ فان اي عدد مكعبه العدد (a) يسمى جذراً تكعيبياً للعدد a .

**تعريف (2-2)**

اذا كان $a \in R$ فان $b = \sqrt[3]{a}$ حيث b هو العدد الحقيقي الوحيد الذي مكعبه a

اي ان : $b^3 = a$

يلاحظ ان لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي وحيد فمثلاً :

(3) هو الجذر التكعيبي للعدد (27) اي ان $(\sqrt[3]{27} = 3)$

(4−) هو الجذر التكعيبي للعدد (64−) اي ان $(\sqrt[3]{-64} = -4)$

($\frac{2}{5}$) هو الجذر التكعيبي للعدد $\frac{8}{125}$ اي ان $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}\right)$

**ملاحظة**

نستنتج مما سبق انه :

(*) اذا كان $a < 0$ فان $b < 0$ (سالب)

(*) اذا كان $a > 0$ فان $b > 0$ (موجب)

(*) اذا كان $a = 0$ فان $b = 0$

## من خواص الجذور التكعيبية :

اذا كان $a , b \in R$ فان :

1) $\sqrt[3]{a \, . \, b} = \sqrt[3]{a} \, . \, \sqrt[3]{b}$ والعكس صحيح

2) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \, , \, b \neq 0$ والعكس صحيح

3) $\sqrt[3]{a} \, . \, \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$ والعكس صحيح

4) $\sqrt[3]{a} \, . \, \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2} \neq a$ لاحظ ان

### مثال ( 1 )

بسط المقدار التالي : $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{128}$

**الحل /**

نحلل الاعداد 54 ، 16 ، 128 الى عاملين احدهما مكعب كامل على الاقل

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \, . \, 2} = \sqrt[3]{27} \, . \, \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} \, . \, \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64} \, . \, \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore \sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{128} = 3\sqrt[3]{2} - 3 \times 2\sqrt[3]{2} - 4 \times 4\sqrt[3]{2}$$

$$= -19\sqrt[3]{2}$$

## مثال ( 2 )

بسط المقدار التالي : $5\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{32}-3\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

**الحل /**

**ملاحظة :**

اذا كانت $0 < a$ فان : $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$

$$=5\sqrt[3]{\frac{1}{16}\times\frac{4}{4}}-\sqrt[3]{8\times 4}+3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\times\frac{4}{4}}$$

$$=5\sqrt[3]{\frac{4}{64}}-2\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{\frac{4}{8}}$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{4}}{4}-2\sqrt[3]{4}+\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{4}}{4}\quad=\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$$

## مثال (3)

مكعب طول ضلعه $3\sqrt[3]{4}$ cm جد حجمه ومساحته الجانبية .

**الحل /** نفرض حجم المكعب $v$ ومساحته الجانبية $A$ .

حجم المكعب = $(\text{طول الضلع})^3$

$$\text{حجم المكعب}=\left(3\sqrt[3]{4}\right)^3$$

$$v=3^3.\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{4}$$

$$=27.\sqrt[3]{64}$$

$$=(27).(4)$$

$$=108\ \ cm^3$$

مربع

مربع

مربع

مربع

$3\sqrt[3]{4}$

المساحة الجانبية للمكعب = 4 × مساحة وجه واحد

$$A=\left(3\sqrt[3]{4}\right)^2\times 4$$

$$=\left(3\sqrt[3]{4}.3\sqrt[3]{4}\right)\times 4$$

$$=\left(9\sqrt[3]{16}\right)\times 4$$

$$=\left(9\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{8}\right)\times 4$$

$$=9\sqrt[3]{2}\times 2\times 4$$

$$=72\sqrt[3]{2}\ \ cm^2$$




س1 / اختصر المقادير التالية :

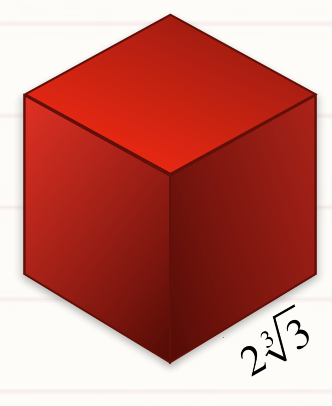
a) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-24}-3\sqrt[3]{\frac{-1}{9}}$

b) $7\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{-16}+4\sqrt[3]{-128}$

c) $\sqrt[3]{32}+2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{(-2)^2}$

س2 / جد ناتج $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$

س3 / في الشكل المجاور : مكعب طول ضلعه $2\sqrt[3]{3}$ cm جد حجمه ومساحته الكلية .




س4 / متوازي سطوح مستطيلة ابعاده : $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ , $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ , $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$ وحدة طول

جد حجمه في ابسط صورة .

3

# الفصل الثالث

# الحدوديات

# Polynomials



| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
| --- | --- |
| العامل المشترك الأكبر | GCF |
| المضاعف المشترك الأصغر | LCM |

$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$




# مراجعة

من المفيد مراجعة ما درست سابقاً في موضوع الحدوديات . وقبل ذلك سوف نوضح الفرق بين :

$(x^2)^3 , 4x , x^4$ .

أي ضرب x في نفسه 4 مرات $x^4 = x . x . x. x$

أي جمع x اربعة مرات $4x = x + x + x + x$

$(x^2)^3 = (x^2)(x^2)(x^2)$

$\therefore (x^2)^3 = (x)(x)(x)(x)(x)(x) = x^6 = x^{(2)(3)}$

## اولاً ضرب حدانية في حدانية أخرى :

نحاول ان نتذكر كيفية إيجاد ناتج $(2x - 1)(x + 3)$

$(2x - 1)(x + 3) = 2x(x) + 2x(3) - 1(x) - 1(3)$

$= 2x^2 + 6x - x - 3$

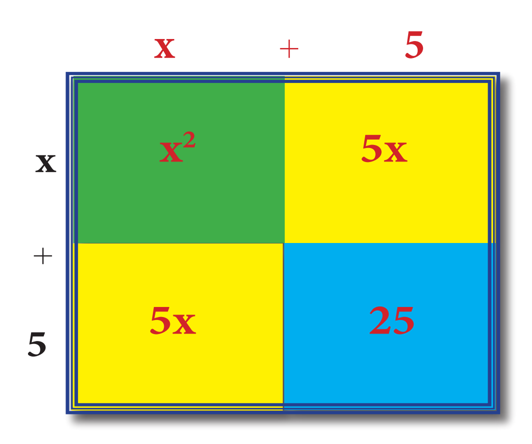
$= 2x^2 + 5x - 3$

أي أن ناتج حاصل ضرب $(x + 3)(2x - 1)$ هو $2x^2 + 5x - 3$

## ثانياً مربع حدانية

تأمل خطوات إيجاد ناتج $(x + 5)^2$

( هندسياً )

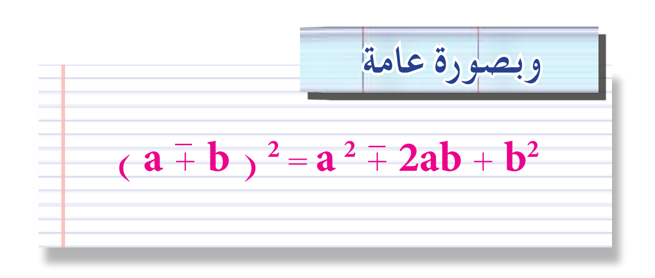



( جبرياً )

$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$

$= x(x) + x(5) + 5(x) + 5(5)$

$= x^2 + 10x + 25$




## ثالثاً تحليل حدودية بإيجاد العامل المشترك الأكبر

لنحاول ان نحلل الحدودية الآتية بإستخراج العامل المشترك الآكبر (G.C.F)

$$6x^3y^2 + 12xy^3$$

$$6x^3y^2 = (2)\ (3) * (x)\ (x)\ (x) * (y)\ (y)$$

$$12xy^3 = (2)\ (2)\ (3)\ (x) * (y)\ (y)\ (y)$$

$$(2) * (3) * (x) * (y) * (y)$$

اذاً العامل المشترك الأكبر هو : $6xy^2$ لذا سيكون التحليل

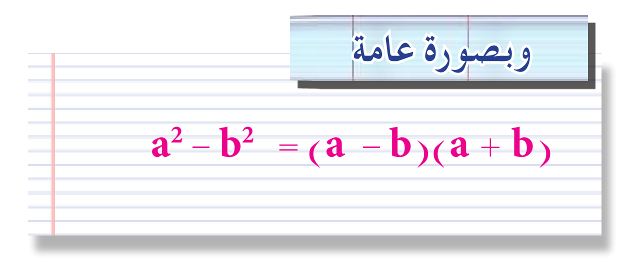
$$6x^3y^2 + 12xy^3 = (6xy^2)\,[x^2 + 2y]$$

## رابعاً تحليل الفرق بين مربعين

فمثلاً : حل $9x^2 - 16$

$$9x^2 - 16 = (3x)^2 - (4)^2$$

$$= (3x - 4)(3x + 4)$$



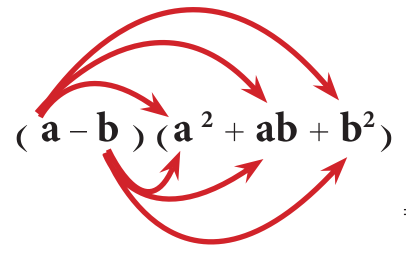

بعد هذه المراجعة المختصرة سنتطرق في البنود اللاحقة لأكمال طرق التحليل الأخرى.




# تحليل الفرق بين مكعبين

تعلمت سابقاً كيفية فك الأقواس بطريقة التوزيع .

فمثلاً لو ضربنا $(a-b)$ في $(a^2+ab+b^2)$ ماذا ينتج ؟




$$= a(a^2) + a(ab) + a(b^2) - b(a^2) - b(ab) - b(b^2)$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3$$

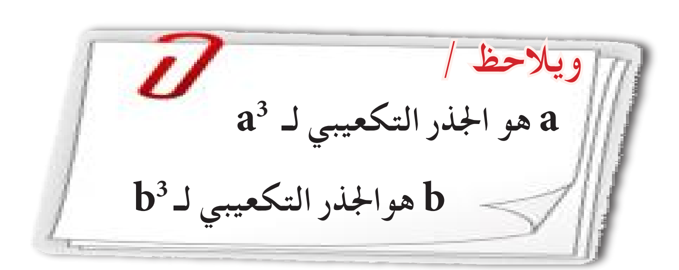
$$= a^3 - b^3$$




ان الصورة : $a^3-b^3$ تسمى الفرق بين مكعبين

**وبصورة عامة**

$$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$




**ملاحظة /** العامل $(a^2+ab+b^2)$ لا يتحلل في $R$ .




حلل كلاً مما يأتي :

1) $x^3-27$ 2) $8x^3-125y^3$ 3) $\frac{1}{a^3} - \frac{64}{b^3}$

4) $a^6-b^6$

**الحل/**

1) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$

$(x)^3 \quad (3)^3$

2) $8x^3 - 125y^3 = (2x-5y)\left((2x)^2+(2x)(5y)+(5y)^2\right)$

$= (2x-5y)\left(4x^2+10xy+25y^2\right)$

$(2x)^3 \quad (5y)^3$

3) $\frac{1}{a^3}-\frac{64}{b^3}=\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{b}\right)\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{4}{b}\right)+\left(\frac{4}{b}\right)^2\right)$

$\left(\frac{1}{a}\right)^3\left(\frac{4}{b}\right)^3=\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{4}{ab}+\frac{16}{b^2}\right)$

4) $a^6 - b^6 = (a^2-b^2)((a^2)^2+(a^2)(b^2)+(b^2)^2)$

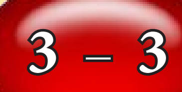
$(a^2)^3 (b^2)^3 = (a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

وكما تلاحظ ومما تعلمته سابقاً بأن $a^2 - b^2$ هو فرق بين مربعين وتحليله هو $(a-b)(a+b)$

في هذه الحالة سيكون التحليل بالشكل الآتي :

$$a^6-b^6=(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$$

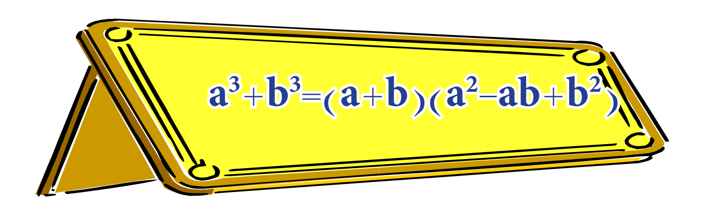
أو بالطريقة الآتية : $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2$ ونكمل التحليل




# تحليل مجموع مكعبين

بنفس السياق والاسلوب المتبع في تحليل فرق بين مكعبين يمكن وضع الصورة العامة لتحليل $a^3+b^3$

حيث :




## مثال

حلل كلاً مما يأتي :

1) $64x^3+1$　　2) $\frac{27}{a^3}+8b^3$　　3) $0.125x^3+y^6$

4) $x^2y^5+y^2x^5$　　5) $\frac{1}{2}h^3+4$

**الحل/**

1) $64x^3 + 1 = (4x+1)((4x)^2 - 4x(1) + (1)^2)$

$(4x)^3 \quad (1)^3 = (4x+1)(16x^2-4x+1)$

2) $\frac{27}{a^3}+8b^3=\left(\frac{3}{a}+2b\right)\left(\left(\frac{3}{a}\right)^2-\left(\frac{3}{a}\right)(2b)+(2b)^2\right)$

$\left(\frac{3}{a}\right)^3 \quad (2b)^3=\left(\frac{3}{a}+2b\right)\left(\frac{9}{a^2}-\frac{6b}{a}+4b^2\right)$

3) $0.125x^3 + y^6 = (0.5x+y^2)((0.5x)^2-(0.5x)(y^2)+(y^2)^2)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$(0.5x)^3 \quad (y^2)^3 \quad = (0.5x+y^2)(0.25x^2 - 0.5xy^2+y^4)$

4) $x^2y^5+y^2x^5 \xrightarrow[\text{عامل مشترك } x^2y^2]{\text{نستخرج}} x^2y^2(y^3+x^3)$

$= x^2y^2(y+x)(y^2-xy+x^2)$

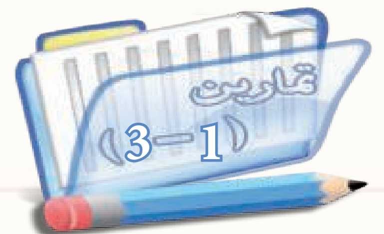
5) $\frac{1}{2}h^3+4=\frac{1}{2}(h^3+8)$ بإستخراج العامل المشترك

$=\frac{1}{2}(h+2)(h^2-2h+4)$

$\frac{1}{2}h^3+4=\frac{h^3+8}{2}$ أو بتوحيد المقامات

$=\frac{1}{2}(h^3+8)$

$=\frac{1}{2}(h+2)(h^2-2h+4)$




س1/ حلل كلاً مما يأتي في ابسط صورة :

1) $x^3 - 125$ 2) $8 + 27y^3$ 3) $a^3 - 64b^3$

4) $3x^3 + 81y^3$ 5) $2xy^4 + 16x^4y$ 6) $\frac{8}{27}a^3 - 1$

7) $\frac{1}{5} + 25z^3$ 8) $1000a^3 - b^3$ 9) $x^6 + y^6$

10) $32 - \frac{1}{2}a^3$ 11) $x^9 + x^3$ 12) $3x^3 + \frac{1}{9}y^3$

13) $x^4 - x$ 14) $0.064x^3 - 0.027y^3$

س2/ لكل سؤال مما يأتي أربع إجابات واحدة فقط صحيحة:

1) احد عوامل المقدار $x^3 + 8$ هو :

a) $x - 2$ b) $x^2 - 4x + 4$ c) $x^2 - 2x + 4$ d) $x^2 + 2x + 4$

2) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2) =$

a) $-2y^3$ b) $2y^3$ c) $-2x^3$ d) $2x^3$

3) اذا كان $(x + y) = 5$ وان $x^2 - xy + y^2 = 7$ فأن $x^3 + y^3 =$

a) 12 b) −2 c) 35 d) 2

4) $1 - x^3 =$

a) $(1 - x)(1 + x + x^2)$ b) $(1 - x)(1 - x - x^2)$

c) $(1 + x)(1 - x + x^2)$ d) $(x + 1)(1 + x + x^2)$



# 3 – 4 تحليل الحدوديات الثلاثية

## اولاً من نوع $x^2 + bx + c$

### مثال ( 1 )

لنحاول تحليل الحدوديات الآتية :

a) $x^2 + 8x + 12$

| جمع العوامل | عوامل العدد 12 |
|---|---|
| $1+12=13$ | $(1)(12)$ |
| $2+6=8$ | ✓ $(2)(6)$ |
| $3+4=7$ | $(3)(4)$ |

في التحليل بالتجربة :-

لاحظ اننا اوجدنا حاصل ضرب الطرفين والوسطين وقمنا بايجاد المجموع الجبري لهما والذي يمثل الحد الاوسط في الحدودية الثلاثية .

$+6x$ حاصل ضرب الطرفين .

$+2x$ حاصل ضرب الوسطين .

$+8x$ الحد الاوسط .

$$x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$$

b) $x^2 - 9x + 18$

| جمع العوامل | من عوامل العدد 18 |
|---|---|
| $1+18=19$ | $(1)(18)$ |
| $2+9=11$ | $(2)(9)$ |
| $3+6=9$ | $(3)(6)$ |
| $^-3+{}^-6={}^-9$ | ✓ $(-3)(-6)$ |

$-3x$ حاصل ضرب الوسطين .

$-6x$ حاصل ضرب الطرفين.

$-9x$ الحد الاوسط .

$$x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$$

c) $x^2 + 6x - 27$

| جمع العوامل | عوامل العدد 27− |
|---|---|
| 1−27=−26 | (1)(−27) |
| 27−1=26 | (27)(−1) |
| 3−9=−6 | (3)(−9) |
| 9−3=6 | (9)(−3) ✓ |

$$x^2 + 6x - 27 = (x + 9)(x - 3)$$

d) $x^2 - 3x - 18$

| جمع العوامل | عوامل العدد 18− |
|---|---|
| 1−18=−17 | (1)(−18) |
| 18−1=17 | (18)(−1) |
| 2−9=−7 | (2)(−9) |
| 9−2=7 | (9)(−2) |
| 3−6=−3 | (3)(−6) ✓ |
| 6−3=3 | (−3)(6) |

$$x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$$

e) $x^2 - 4xy - 77y^2$

| جمع العوامل | عوامل العدد 77− |
|---|---|
| 1−77=−76 | (1)(−77) |
| 77−1=76 | (−1)(77) |
| 11−7=4 | (−7)(11) |
| 7−11=−4 | (7)(−11) ✓ |

$$x^2 - 4xy - 77y^2 = (x - 11y)(x + 7y)$$

ثانياً من نوع $ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$

## مثال (2)

لنحاول تحليل الحدودية

a) $6x^2 + 17x + 7$

العدد $7$ $(1)(7) = 7$

العدد $6 = (1)(6)$ ، $(2)(3)$

$(1)(6) \quad (1)(7) \Rightarrow (1)(1) + (6)(7) = 43$

$(1)(6) + (7)(1) = 13$

$(2)(3) \quad (1)(7) \quad (2)(1) + (3)(7) = 23$

$(2)(7) + (3)(1) = \boxed{17}$ ✓

$$\therefore \; 6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$$

3

14

**b)** $7x^2 - 26x - 8$

$\left.\begin{matrix}(1)(8)\\(2)(4)\end{matrix}\right] = 8$ العدد  $(1)(7) = 7$ العدد

$(1)(1) - (8)(7) = -55$

$(1)(7) - (8)(1) = -1$

$(2)(1) - (4)(7) = \boxed{-26}$ ✓

$(2)(7) - (4)(1) = 10$

$\therefore\ 7x^2 - 26x - 8 = (7x + 2)(x - 4)$

$2$, $-28$

**c)** $3x^2 - 17x + 10$

$\left.\begin{matrix}(1)(10)\\(2)(5)\end{matrix}\right] = 10$ العدد  $(1)(3) = 3$ العدد

$(1)(1) + (10)(3) = 31$

$(1)(3) + (10)(1) = 13$

$(2)(1) + (5)(3) = \boxed{17}$ ✓

$(2)(3) + (5)(1) = 11$

$\therefore\ 3x^2 - 17x + 10 = (3x - 2)(x - 5)$

$-2$, $-15$

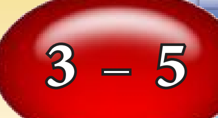
**وبصورة عامة**

$ax^2 + bx + c$

$(\square + \Delta)(\square + \Delta)$

$\square \cdot \square = a$  $\Delta \cdot \Delta = c$

$\Delta \cdot \square + \square \cdot \Delta = b$

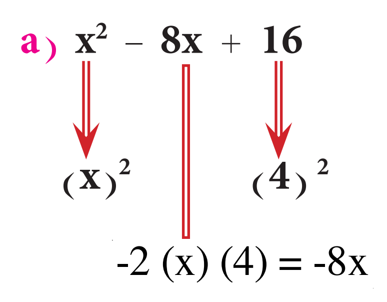



# تحليل المربع الكامل




نحاول ان نحلل :

a) $x^2 - 8x + 16$



$(x)^2$     $(4)^2$

$-2(x)(4) = -8x$     اي مربع كامل

$\therefore x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

b) $9x^2 + 12x + 4$

$(3x)^2$     $(2)^2$

$2(3x)(2) = 12x$     اي مربع كامل

$\therefore 9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$

c) $25 - 25x + 4x^2$

$(5)^2$     $(2x)^2$

$-2(5)2x = -20x \neq -25x$     ليس مربعاً كاملاً

**وبصورة عامة**

تكون الحدودية $ax^2 + bx + c$ مربعاً كاملاً

اذا كان $bx = \mp 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

## مثال ( 2 )

اي الحدوديات تمثل مربعاً كاملاً ؟

a) $x^2 + 10x + 25$

b) $9x^2 - 37x + 4$

c) $16x^2 - 8x + 1$

d) $3x^2 - 20x - 9$

e) $25x^2 + 76x + 3$

**الحل /**

a) $+2\sqrt{(ax^2)(c)} = +2\sqrt{(x^2)(25)} = 10x = bx$ مربعاً كاملاً

b) $-2\sqrt{(ax^2)(c)} = -2\sqrt{(9x^2)(4)} = -12x \neq bx$ ليس مربعاً كاملاً

c) $-2\sqrt{(ax^2)(c)} = -2\sqrt{(16x^2)(1)} = -8x = bx$ مربعا كاملاً

d) $3x^2 - 20x - 9$ ليس مربعاً كاملاً لأن الحد الاخير سالباً

e) $25x^2 + 76x + 3$ ليس مربعاً كاملاً لأن 3 ليست مربعاً كاملاً

## [ 1 – 5 – 3 ] ايجاد الحد المفقود في الحدودية الثلاثية لتصبح مربعاً كاملاً : –

الحدودية الثلاثية بشكل عام هي بصورة $ax^2 + bx + c$ ويمكن ايجاد الحد المفقود باستخدام القانون الاتي :

$$bx = \mp 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

### مثال ( 3 )

جد الحد المفقود في الحدودية $25x^2 - \ldots\ldots + 49$ لتصبح مربعاً كاملاً

**الحل/**

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} = 2(5x)(7) = 70x$$

$$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$$

### مثال ( 4 )

جد الحد المفقود في الحدودية $x^2 + \ldots\ldots + 100y^2$ لتصبح مربعاً كاملاً

**الحل/**

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(100y^2)} = 2x(10y)$$

$$= 20xy$$

$$\therefore x^2 + 20xy + 100y^2 = (x + 10y)^2$$

### مثال ( 5 )

جد الحد المفقود في الحدودية $16 + 8x + \ldots\ldots$ لتصبح مربعاً كاملاً

**الحل/**

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)}$$

$$64x^2 = 4 \times 16 \times ax^2$$

$$\frac{64x^2}{64} = ax^2 \Rightarrow ax^2 = x^2$$

$$\therefore x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

## مثال ( 6 )

جدالحد المفقود في الحدودية $25 + -20x$ .... لتصبح مربعاً كاملاً

الحل/

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$20x = 2\sqrt{(ax^2)(25)}$$

$$400x^2 = 4 \times 25 \times ax^2$$

$$ax^2 = \frac{400x^2}{100} \Rightarrow ax^2 = 4x^2$$

$$\therefore 4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$$

## مثال ( 7 )

جدالحد المفقود في الحدودية .... + $x^2 + 14x$ لتصبح مربعاً كاملاً

الحل/

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$14x = 2\sqrt{(x^2)(c)}$$

$$196x^2 = 4 \times x^2 \times c$$

$$\frac{196x^2}{4x^2} = c \Rightarrow c = 49$$

$$\therefore x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$$

## مثال ( 8 )

جد الحد المفقود في الحدودية .... + $9x^2 - 60x$

لتصبح مربعاً كاملاً

الحل/

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$60x = 2\sqrt{(9x^2)(c)}$$

$$3600x^2 = 4 \times 9x^2 \times c$$

$$3600x^2 = 36x^2 \times c$$

$$c = \frac{3600x^2}{36x^2} \Rightarrow c = 100$$

$$\therefore 9x^2 - 60x + 100 = (3x - 10)^2$$




# العامل المشترك الاكبر والمضاعف المشترك الاصغر

سبق وان تعلمت طريقة ايجاد العامل المشترك الاكبر ( GCF ) والمضاعف المشترك الاصغر ( LCM ) لعددين او اكثر وكذلك تعرفت في البنود السابقة وفي الصف الثاني المتوسط على طرق تحليل الحدوديات في هذا البند سنتعرف على طريقة ايجاد كل من ( GCF )، ( LCM ) للحدوديات :

## * أيجاد العامل المشترك الاكبر ( GCF ) والمضاعف المشترك الاصغر ( LCM )

### مثال ( 1 )

جد ( GCF )، ( LCM ) للحدوديات الاتية $6x^2y - 6xy^2$ , $4x^2 - 4xy$ , $x^3 - xy^2$

**الحل /**

نحلل كل حدودية على حدة وحسب طرق التحليل السابقة

$x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2)$

$= x(x - y)(x + y) \ldots *$

$4x^2 - 4xy = (2)(2)x(x - y) \ldots *$

$6x^2y - 6xy^2 = (2)(3)xy(x - y) \ldots *$

$GCF = x(x - y)$

$LCM = 12xy(x - y)(x + y)$

### مثال ( 2 )

جد ( GCF )، ( LCM ) للحدوديات :

$a^2 - 9$ , $a^2 - 6a + 9$ , $a^2 - 8a + 15$

**الحل /**

نحلل الحدوديات

$a^2 - 9 = (a - 3)(a + 3) \ldots *$

$a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2 \ldots *$

$a^2 - 8a + 15 = (a - 3)(a - 5) \ldots *$

$GCF = (a - 3)$

$LCM = (a - 3)^2(a + 3)(a - 5)$

## مثال ( 3 )

جد ( GCF )، ( LCM ) للحدوديات الاتية :

$$2a^3b - 2ab^3 \;,\; a^4 - 2a^3b + b^2a^2 \;,\; 3a^4b - 3ab^4$$

**الحل /**

$$2a^3b - 2ab^3 = 2ab(a^2 - b^2)$$
$$= 2ab(a - b)(a + b) \quad ....*$$
$$a^4 - 2a^3b + b^2a^2 = a^2(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a^2(a - b)^2 \quad ....*$$

$$3a^4b - 3ab^4 = 3ab(a^3 - b^3)$$
$$= 3ab(a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad ....*$$

$$\therefore\ GCF = a(a - b)$$

$$LCM = 6a^2b(a - b)^2(a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

الخلاصة لايجاد ( GCF )، ( LCM )

* نحلل الحدوديات.
* GCF : يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة فقط وباصغر أس .
* LCM : يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة باكبر أس وغير المشتركة .




س 1 / حلل كل مما ياتي :

1) $x^2 + 6x + 8$

2) $x^2 - 2x - 15$

3) $x^2 + 3x + 2$

4) $4x^2 + 21x + 27$

5) $x^2 + 11x - 80$

6) $4x^2 - 4x - 15$

7) $6x^2 - 7x - 20$

8) $x^2 + 20x + 100$

9) $16x^2 + 8x + 1$

10) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

س 2 / بين اي الحدوديات الاتية تمثل مربعاً كاملاً .

1) $x^2 - 18x + 81$

2) $x^2 - 7xy + 49y^2$

3) $4x^2 + 25 - 12x$

4) $4x^2 - 25 - 20x$

5) $8x^2 - 40x + 50$

6) $-x^2 - 2xy - y^2$

س3 / اكمل الحدوديات الاتية لتصبح مربعاً كاملاً :

1) ...... $- 32x + 64$

2) $x^2 - 12x +$ .....

3) $25x^2 -$ ....... $+ 9y^2$

4) ...... $+ 24ab + 36b^2$

س4/ حدد الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1) قيمة m التي تجعل الحدودية $25x^2 - mx + 4$ مربعاً كاملاً تساوي

a) 30 b) 20 c) 10 d) −10

2) ان قيمة n التي تجعل الحدودية $y^2 + 12y - n$ مربعاً كاملاً هي :

a) 36 b) −36 c) 144 d) غير ذلك

س5 / جد (LCM) , (GCF) للحدوديات الأتية:

1) $x^3+y^3$ , $x^2+xy$, $x^3-xy^2$

2) $x^4-16$ , $x^4+8x^2+16$ , $x^6+64$

3) $3x^2-3x^2y^2$ , $5x+5xy$ , $x-xy-2xy^2$

4) $\frac{1}{2}x^2-2$ , $2x^3-16$ , $3x^2-x-10$

5) $(5x^2-3x)^3$ , $5x^2+7x-6$ , $10x^2-6x$

6) $x^2-y^2$ , $x^3-y^3$ , $(x-y)^4$, $7x-7y$



# 3 – 7 استخدام التحليل في تبسيط المقادير الجبرية

## اولاً اختصار الحدوديات النسبية

ان مجموعة الاعداد النسبية Q تكتب بشكل :

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

كما تعلم ان :

$$\frac{3}{5} = \frac{(2)(3)}{(2)(5)} = \frac{6}{10} \quad , \quad \frac{3}{5} = \frac{(5)(3)}{(5)(5)} = \frac{15}{25}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{(a)(3)}{(a)(5)} = \frac{3a}{5a} \quad , \quad a \neq 0$$

**وبصورة عامة**

اذا ضرب كل من البسط والمقام في عدد حقيقي لايساوي صفراً فان قيمة الكسر لاتتغير

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad c \neq 0$$

بالأمثلة :

$$\frac{30}{40} = \frac{\frac{30}{2}}{\frac{40}{2}} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{30}{40} = \frac{\frac{30}{10}}{\frac{40}{10}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{30}{40} = \frac{\frac{30}{a}}{\frac{40}{a}} \quad , a \neq 0$$

**وبصورة عامة**

اذا قسم كل من البسط والمقام على عدد حقيقي لايساوي صفراً فان قيمة الكسر لاتتغير .

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} \quad , b, c \neq 0$$

## الامثلة الأتية توضح تبسيط الحدوديات النسبية :

### مثال ( 1 )

بسط كلا مما ياتي :

1) $\dfrac{6x+12}{x^2-4}$ 2) $\dfrac{x^3-27}{x^3+3x^2+9x}$ 3) $\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2-7x+6}$ 4) $\dfrac{2x^2-2}{3-3x^3}$

**الحل/**

1) $$\frac{6x+12}{x^2-4}=\frac{6\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)}=\frac{6}{(x-2)}$$

2) $$\frac{x^3-27}{x^3+3x^2+9x}=\frac{(x-3)\cancel{(x^2+3x+9)}}{x\cancel{(x^2+3x+9)}}=\frac{(x-3)}{x}$$

3) $$\frac{2x^2-4x+2}{x^2-7x+6}=\frac{2(x^2-2x+1)}{(x-6)(x-1)}=\frac{2(x-1)^{\cancel{2}}}{(x-6)\cancel{(x-1)}}=\frac{2(x-1)}{(x-6)}$$

4) $$\frac{2x^2-2}{3-3x^3}=\frac{2(x^2-1)}{3(1-x^3)}=\frac{2(x-1)(x+1)}{-3(x^3-1)}=\frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{-3\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{2(x+1)}{-3(x^2+x+1)}$$

## ثانياً ضرب وقسمة الحدوديات النسبية .

ضرب الحدوديات النسبية .

تعلم ان :

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{(a)(c)}{(b)(d)}=\frac{ac}{bd} \quad , b,d\neq 0$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad , b,c,d\neq 0$$

اي ان :

$$\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}}$$

### مثال (2)

ضع في ابسط صورة : $\frac{3x+2}{2x+4}.\frac{x^2+5x+6}{9x^2-4}$

**الحل /**

$$\frac{3x+2}{2x+4}.\frac{x^2+5x+6}{9x^2-4}$$

$$=\frac{\cancel{(3x+2)}}{2\cancel{(x+2)}}.\frac{(x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(3x+2)}(3x-2)}=\frac{(x+3)}{2(3x-2)}$$

### مثال (3)

ضع في ابسط صورة : $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}\div\frac{5x^2+5x}{x^2-4}$

**الحل /**

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}\div\frac{5x^2+5x}{x^2-4}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)^2}\div\frac{5x(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)^2}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{5x(x+1)}=\frac{(x-2)}{5x}$$

## مثال ( 4 )

ضع في ابسط صورة : $\frac{x^2-25}{x^3-125}\div\frac{x^2+10x+25}{x^2+x-20}$

**الحل /**

$$\frac{x^2-25}{x^3-125}\div\frac{x^2+10x+25}{x^2+x-20}$$

$$=\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)(x^2+5x+25)}\div\frac{(x+5)^2}{(x+5)(x-4)}$$

$$=\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)(x^2+5x+25)}\cdot\frac{(x+5)(x-4)}{(x+5)^2}=\frac{(x-4)}{(x^2+5x+25)}$$

## مثال ( 5 )

ضع في ابسط صورة : $(x^2+2x+1)\div\frac{(x+1)^3}{x^3+1}$

**الحل /**

$$(x^2+2x+1)\div\frac{(x+1)^3}{x^3+1}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{1}\div\frac{(x+1)^3}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{1}\cdot\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^3}=(x^2-x+1)$$

## ثالثاً جمع وطرح الحدوديات النسبية .

لايجاد ناتج جمع او طرح الحدوديات النسبية ، يجب ان نجد المضاعف المشترك الاصغر ( **LCM** ) لمقامات الحدوديات وذلك بالتحليل وحسب الطرائق السابقة والامثلة الآتية توضح ذلك

### مثال ( 6 )

ضع في ابسط صورة : $\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}$

**الحل/**

$$\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}$$

$$\frac{2}{(x-3)(x+3)}+\frac{3}{(x-1)(x-3)} \quad , \ LCM=(x-3)(x+3)(x-1)$$

$$\frac{2(x-1)}{(x-3)(x+3)(x-1)}+\frac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)(x-1)}$$

$$\frac{2x-2+3x+9}{(x-3)(x+3)(x-1)}$$

$$\frac{5x+7}{(x-3)(x+3)(x-1)}$$

### مثال ( 7 )

ضع في ابسط صورة : $\frac{2x^3-128}{x^3+4x^2+16x}-\frac{x-1}{x}$

**الحل/**

$$\frac{2x^3-128}{x^3+4x^2+16x}-\frac{x-1}{x}$$

$$=\frac{2(x^3-64)}{x(x^2+4x+16)}-\frac{x-1}{x}$$

$$=\frac{2(x-4)\cancel{(x^2+4x+16)}}{x\cancel{(x^2+4x+16)}}-\frac{(x-1)}{x}$$

$$=\frac{2(x-4)}{x}-\frac{(x-1)}{x} \Rightarrow \frac{2(x-4)-(x-1)}{x} \Rightarrow \frac{2x-8-x+1}{x} \Rightarrow \frac{x-7}{x}$$




س1/ بسط كلا مما ياتي :

1) $\dfrac{x^3+8}{x^3-2x^2+4x}$ 2) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

3) $\dfrac{12-4x}{x^2-2x-3}$ 4) $\dfrac{x(2x-1)-1}{x(x-1)}$

س2/ جد ناتج كل مما ياتي في ابسط صورة :

1) $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2+6x-16}$ 2) $\dfrac{x^2+9x+20}{x^2+5x-24}\div\dfrac{x^2+15x+56}{x^2+x-12}$

3) $\dfrac{x^2+x+1}{x^4-x}-\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$ 4) $\dfrac{x^2+4x-21}{x^2+14x+49}\div\dfrac{x-7}{2x^2-98}$

5) $\left(x^2-xy-2y^2\right)\div\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\cdot\left(x^3-8y^3\right)\right)$ 6) $\left(\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}\cdot\dfrac{x+y}{x-y}\right)\div\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\right)$

7) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{8}{x^2+2x-3}$ 8) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{5x-15}{(x-3)^2}-\dfrac{3x+1}{x^2-4x+3}$

9) $\left(\dfrac{x^3+27}{x+3}\div\dfrac{x^3-3x^2+9x}{x^2}\right)\div x$ 10) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}+1$

# الفصل الرابع 4

# المتباينات

# Inequalities



| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
| --- | --- |
| متباينة | $a < b$ ، $a,b \in R$ |
| متباينة مزدوجة | $d < f(x) < c$ |
| صائبة | T |
| خاطئة | F |

الفصل 4

4 – 1

# الجمل الرياضية

## العبارة Statement

### المقدمة

إن دراسة الجمل الرياضية يتطلب معرفة في موضوع المنطق الرياضي والذي هو بالحقيقة منطق لغوي لعلوم الرياضيات، لو أمعنا النظر في الجمل الآتية :

(1) بغداد عاصمة العراق (2) $4 > 3$ (3) $-1$ أكبر عدد صحيح سالب (4) $5=\sqrt{25}$ .

نلاحظ أن كلاً منها جملة خبرية لها معنى محدد وهو أن كلاً منها إما صائبة أو خاطئة فقط، ولا يمكن أن تقبل الصواب والخطأ معاً كما في ( $2x-1=0$ ) فهي صائبة لمجموعة قيم $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ وخاطئة لقيم أخرى إعتماداً على مجموعة التعويض كما تعلمنا في موضوع المعادلات .

**تعريف [4–1] :**

العبارة هي جملة خبرية ذات معنى محدد إما صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في آن واحد .

**نفي العبارات :** في اللغة نستخدم أداة النفي « ليس » مثلاً العبارة $5 > 4$ يكون نفيها 5 ليس أكبر من 4 أو بالرموز $5 \ngtr 4$ فاذا كانت P عبارة فأن $(\sim P)$ هو نفي P ، وإذا كانت P صائبة فأن نفيها خاطئة والعكس صحيح كما في الجدول .

| P | ~ P |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

### أمثلة

| | P | ~ P |
|---|---|---|
| (1) | 2 عدداً أولي | 2 عدداً ليس أوليا |
| (2) | $-3 \in N$ | $-3 \notin N$ |
| (3) | $\sqrt{5} \notin Q$ | $\sqrt{5} \in Q$ |
| (4) | $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2} \ngtr \frac{1}{4}$ |

| P | ~ P |
|---|---|
| T | F |
| F | T |
| T | F |
| T | F |

## أدوات الربط والعبارات المركبة

سوف نتطرق في هذه المرحلة لأداتي الربط : ( أو " $\vee$ " ) ، ( و " $\wedge$ " )

### أمثلة

1. $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي أو 9 عدد غير أولي.
2. مجموع زوايا المثلث $180^\circ$ و المربع مستطيل.
3. قطرا المعين متناصفان و $27 = (-3)^3$

لاحظ أننا أستخدمنا الأداة أو والأداة و للحصول على جملة جديدة تسمى جملة مركبة.

*تكون الجملة المركبة الناتجة من ربط جملتين بالأداة أو خاطئة فقط عندما تكون كلتا العبارتين خاطئة.

* تكون الجملة المركبة الناتجة من ربط جملتين بالأداة و صائبة فقط عندما تكون كلتا العبارتين صائبة،

كما في الجداول الآتية:

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \vee P_2$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \wedge P_2$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

ففي المثال : (1) عبارة صائبة . $T \vee T = T$

(2) عبارة صائبة . $T \wedge T = T$

(3) عبارة خاطئة . $T \wedge F = F$

### تعريف [2-4] :

المتباينة : جملة خبرية تتكون من وضع أحد رموز التباين بين تعبيرين جبريين.

| الرمز | المعنى |
| --- | --- |
| $>$ | أكبر من |
| $<$ | أصغر من |
| $\leq$ | أصغر أو يساوي |
| $\geq$ | أكبر أو يساوي |
| $\neq$ | لا يساوي |

**فمثلاً:**

$x^2 - x > 0$ ، $2 \leq 3x - 4 < 5$ ، $x + 3 \leq 2$ ، $2x - 1 < 5$

$3 \neq 5$ ، $15 < 8$ ، $5x^2 - 3x + 1 \leq 6$ .

وستقتصر دراستنا في هذه المرحلةعلى المتباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد . وكما درسنا في فصل الأعداد الحقيقية أن ( $a > b$ ) فأن $a$ يقع يمين $b$ على مستقيم الأعداد أي أنه $a - b > 0$ .

**فمثلاً**

( 1 ) الأعداد يسار العدد ( 3 ) ( عدا 3 نفسه ) تمثل على مستقيم الأعداد بشكل :

وتكتب ( $x < 3$ ) وتقرأ $x$ أصغر من 3 .

( 2 ) الأعداد يمين العدد ( 1 ) عدا العدد 1 نفسه تمثل على مستقيم الأعداد بشكل :

وتكتب ( $x > 1$ ) وتقرأ $x$ أكبر من 1 .

( 3 ) الأعداد يمين العدد ( $-3$ ) ومن ضمنها ( $-3$ ) تمثل على مستقيم الأعداد بشكل :

وتكتب ( $x \geq -3$ ) وتقرأ $x$ أكبر من أو تساوي $-3$ .

( 4 ) الأعداد على يسار ( 2 ) ومن ضمنها ( 2 ) تمثل بشكل :

وتكتب ( $x \leq 2$ ) وتقرأ $x$ أصغر من أو يساوي 2 .



# 4 – 2 المتباينة الخطية (من الدرجة الأولى) ذات المتغير الواحد

هي علاقة تأخذ أحد الأشكال الآتية :

$ax + b \geq 0$ أو $ax + b \leq 0$ ، $ax + b > 0$ ، $ax + b < 0$ حيث $a \neq 0$ .

## [4 – 2 – 1] مجموعة حل المتباينة

بعض المتباينات (مثلاً $3 < 7$ أو $4 \neq 2$) هي جمل رياضية صائبة كذلك ($4 < -3$ و $5 < 16$) خاطئة ، لكن المتباينات الأولى قد تكون صائبة لقيم المتغير فيها ضمن مجموعة تعويض معلومة .

**مثالاً**

لو أخذنا المتباينة : $2x + 3 \leq 8$ وكانت مجموعة التعويض هي $I = \{0, 1, 2, 3\}$ لذا فأن مجموعة الحل $s = \{0, 1, 2\}$ اي قيم x التي تجعل العبارة صائبة .

| قيمة الصواب | المتباينة $2x + 3 \leq 8$ | $x \in I$ |
|---|---|---|
| T | $0 + 3 \leq 8$ | 0 |
| T | $(2)(1) + 3 \leq 8$ | 1 |
| T | $(2)(2) + 3 \leq 8$ | 2 |
| F | $(2)(3) + 3 \leq 8$ | 3 |

## [4 – 2 – 2] خواص المتباينات

إذا كانت $a, b, c \in R$ فأن :

(1) اذا كانت $b < c$ و $a < b$ فأن $a < c$ ........ خاصية التعدي

(2) اذا كانت $a < b$ فأن $a+c < b+c$ ........ خاصية الجمع

اذا كان $3 < 4$ ، $c = 2$ فأن $4 + 2 < 3 + 2$

أي أن عند إضافة اعداد متساوية الى طرفي المتباينة فأن الترتيب لا يتغير .

(3) اذا كانت $a < b$ فأن : $a - c < b - c$ ....... خاصية الطرح

اذا كان $2 < 4$ ، $c = 3$ ، $2 - 3 < 4 - 3$

(4) اذا كانت $a < b$ , $c$ عدد موجب فأن :

$$ac < bc$$

أي انه عند ضرب طرفي متباينة بعدد موجب فأنها تبقى صائبة بنفس الترتيب .

$2 < -3$ ، $c = 3$ ، فأن $(2)(3) < (-3)(3)$

اي $6 < -9$

(5) اذا كانت $a < b$ , $c$ عدد سالب فأن :

$$ac > bc$$

اذا كان $5 < -2$ , $c = -2$ فأن :

$$(5)(-2) > (-2)(-2)$$

اي $-10 > 4$

عند ضرب طرفي متباينة بعدد سالب فأن المتباينة صائبة بعكس الترتيب .

(6) اذا كانت $a < b$ ، $c$ عدد موجب فأن : $\frac{b}{c} < \frac{a}{c}$

اذا كان $6 < 4$ ، $c = 2$ فأن $\frac{6}{2} < \frac{4}{2}$ اي $3 < 2$

عند قسمة طرفي متباينة على عدد موجب فأنها صائبة بنفس الترتيب

(7) اذا كانت $a < b$ ، $c$ عدد سالب فأن :

$\frac{b}{c} > \frac{a}{c}$ ، اذا كان $10 < 8$ ، $c = -2$ فأن $\frac{10}{-2} > \frac{8}{-2}$ اي $-5 > -4$

عند قسمة طرفي متباينة على عدد سالب فأنها صائبة بعكس الترتيب .

نذكر بأن خواص المتباينات صحيحة لكل رموز التباين $( \neq , \geq , \leq , > , < )$.

## تعريف [4-3] :

مجموعة حل المتباينة : $f(x) < m$ حيث $m \in R$ ، $f(x)$ حدودية في x هي مجموعة قيم المتغير x التي تجعل المتباينة صائبة .

### مثال ( 1 )

حل المتباينة الآتية ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد $4x - 5 < 3(x - 2) - 1$

**الحل/**

$4x - 5 < 3(x - 2) - 1$ المتباينة

$4x - 5 < 3x - 7$ توزيع

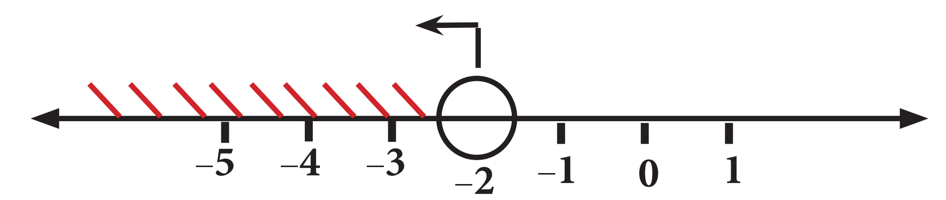
$4x - 5 - 3x < 3x - 7 - 3x$ اضافة $(-3x)$ للطرفين

$x - 5 < -7$

$x - 5 + 5 < -7 + 5$ اضافة (5) للطرفين

$\therefore x < -2$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{x : x < -2\}$




### مثال ( 2 )

حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد $-4(x - 2) > 5 - 5(x - 1)$

**الحل/**

$-4(x - 2) > 5 - 5(x - 1)$ المتباينة

$-4x + 8 > 5 - 5x + 5$ ازالة الاقواس

$-4x + 8 > 10 - 5x$

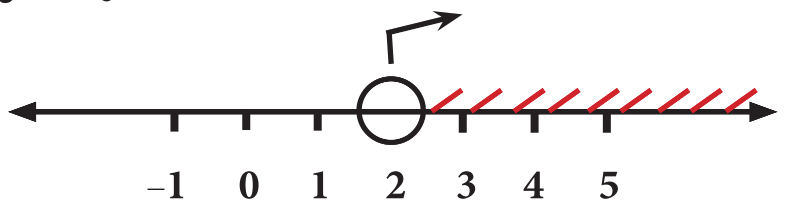
$-4x + 5x + 8 > 10 - 5x + 5x$ اضافة $(5x)$ للطرفين

$x + 8 > 10$

$x + 8 - 8 > 10 - 8$ اضافة(‎-8‎) للطرفين

$\therefore x > 2$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{x : x > 2\}$




## مثال ( 3 )

حل المتباينة ومثل على مستقيم الاعداد $\frac{-2x + 3}{-5} \leq x + 1$

**الحل/**

المتباينة $\frac{-2x + 3}{-5} \leq x + 1$

((لاحظ تغير اتجاه المتباينة )) بضرب طرفي المتباينة في ‎–5‎ $-5\left(\frac{-2x + 3}{-5}\right) \geq -5(x + 1)$

اضافة (5x) للطرفين . $-2x + 3 \geq -5x - 5$

باضافة (‎–3‎) للطرفين $-2x + 3 + 5x \geq -5x - 5 + 5x$

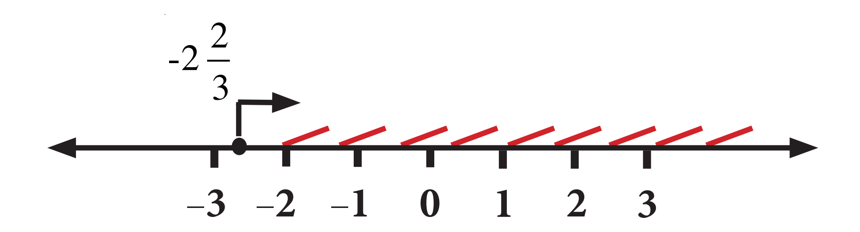
$3x + 3 - 3 \geq -5 - 3$

$3x \geq -8$

بالقسمة على 3 $\frac{3x}{3} \geq \frac{-8}{3}$

$\therefore x \geq \frac{-8}{3}$

مجموعة الحل $\therefore s = \left\{x : x \geq -2\frac{2}{3}\right\}$



## مثال ( 4 )

حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

**الحل/**

المتباينة $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

بضرب طرفي المتباينة في 4 $4\left(\frac{y-3}{4}\right) - 4(1) > 4\left(\frac{y}{2}\right)$

تبسيط الطرفين

$y - 3 - 4 > 2y$

$y - 7 > 2y$

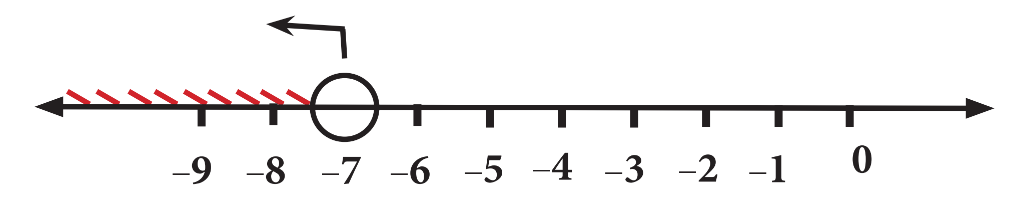
باضافة $(-y)$ للطرفين

$y - 7 - y > 2y - y$

$-7 > y$

$y < -7$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{y : y < -7\}$ .




## مثال ( 5 )

حل المتباينة $( -u \neq -7 )$ ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد

**الحل/**

المتباينة $-u \neq -7$

نضرب الطرفين في $(-1)$ ..... ويمكن القسمة على $(-1)$ $(-1)(-u) \neq (-1)(-7)$

تبسيط الطرفين

$u \neq 7$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{u : u \neq 7\} = R-\{7\}$



الان نحاول حل متباينة من نوع : $d < f(x) < c$ حيث $c, d \in R$ ، $f(x)$ حدودية في $x$ .

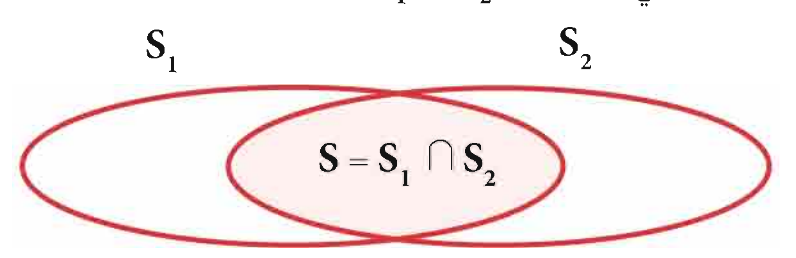
ويسمى هذا النوع متباينة مزدوجة ((Double Inequalities))

وهي عبارة عن متباينتين : $f(x) < c$ , $f(x) > d$ مربوطتين باداة الربط ((و)) .

* لتكن مجموعة حل الاولى $f(x) < c$ هي المجموعة $S_1$.

* لتكن مجموعة حل الثانية $f(x) > d$ هي مجموعة الحل $S_2$ .

فأن مجموعة حل المتباينة الاصلية : هي $S$ حيث : $S = S_1 \cap S_2$



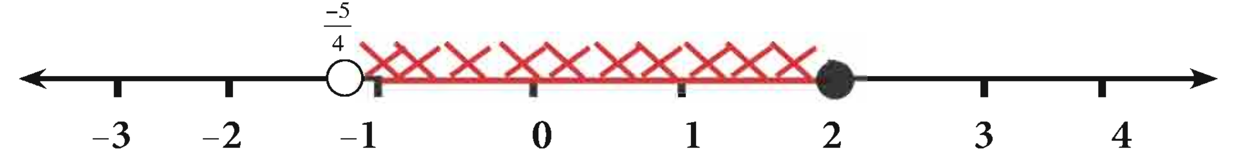

## مثال (6)

حل المتباينة $-3 < 4x + 2 \le 10$ ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد

**الحل /**

| المتباينة الثانية | المتباينة الاولى |
|---|---|
| $4x + 2 > -3$ | $4x + 2 \le 10$ |
| $4x + 2 - 2 > -3 - 2$ باضافة $(-2)$ | $4x + 2 - 2 \le 10 - 2$ باضافة $(-2)$ |
| $4x > -5$ تبسيط | $4x \le 8$ تبسيط |
| $\frac{4x}{4} > \frac{-5}{4} \Rightarrow x > \frac{-5}{4}$ بالقسمة على 4 | $\frac{4x}{4} \le \frac{8}{4} \Rightarrow x \le 2$ بالقسمة على 4 |
| $\therefore s_2 = \left\{x : x > \frac{-5}{4}\right\}$ | $s_1 = \{x : x \le 2\}$ |

$$\therefore s = s_1 \cap s_2 = \{x : x \le 2\} \cap \left\{x : x > \frac{-5}{4}\right\}$$




$$\therefore s = \left\{x : \frac{-5}{4} < x \le 2\right\}$$

## مثال ( 7 )

حل المتباينة $3<1-2y\leq 10$ ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد .

**الحل/**

يمكن حل المتباينة دون الحاجة الى التجزئة كما في المثال السابق :

| | |
|---|---|
| $3<1-2y\leq 10$ | المتباينة الاصلية |
| $3-1<1-2y-1\leq 10-1$ | باضافة ( $-1$ ) الى طرفي المتباينة |
| $2<-2y\leq 9$ | تبسيط |
| $\frac{2}{-2}>\frac{-2y}{-2}\geq\frac{9}{-2}$ | بالقسمة على ( $-2$ ) مع مراعاة تغير الترتيب |
| $-1>y\geq\frac{-9}{2}$ | |

يفضل في كتابة مجموعة حلول المتباينة المزدوجة ان يكون العدد الاصغر الى اليسار ليكون ذلك متناسقاً مع خاصية الترتيب على مستقيم الاعداد اي ان : $s=\left\{y:\frac{-9}{2}\leq y<-1\right\}$




**تدريب** حل مثال ( 6 ) بنفس هذه الطريقة .

## مثال ( 8 )

ما هي الاعداد الصحيحة التي اذا اضيفت الى ثلاثة امثالها ( 5 ) فان الناتج يقع بين 17 ، 35

**الحل /**

نفرض احد الاعداد الصحيحة = y

| | |
|---|---|
| اذاً تصبح المسألة بالصورة الجبرية | $17<3y+5<35$ |
| باضافة( $-5$ ) | $17-5<3y+5-5<35-5$ |
| | $12<3y<30$ |
| بالقسمة على ( 3 )مع المحافظة على ترتيب التباين | $\frac{12}{3}<\frac{3y}{3}<\frac{30}{3}$ |
| | $4<y<10$ |

$\therefore$ الاعداد الصحيحة التي تحقق المسألة هي 9 , 8 , 7 , 6 , 5




س1 / أبحث في صحة كل من العبارات الآتية :

1) $(-2)^3 = -8$ و 7 عدد أولي.

2) $\sqrt{15} = \sqrt{5}.\sqrt{3}$ أو $(-3)$ يقع على يمين $-2$ على خط الأعداد.

3) قياس كل زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع $60^\circ$ و كل مستطيل مربع.

4) الصفر عدد غير نسبي أو $\sqrt{6} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

5) $\sqrt[3]{-64} = -4$ و $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ .

س2 / حل كلا من المتباينات الاتية ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد .

(1) $2x+3\leq9$ (2) $5-2y>4$ (3) $3Z+5>17$ (4) $9\leq5-3t$

(5) $\frac{3k+5}{2}>4$ (6) $\frac{2p-5}{-3}\leq2$ (7) $2(2p-1)\leq6-(p+8)$

(8) $\frac{1}{3}t+\frac{7}{12}>\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}$ (9) $-10\leq2b-3\leq9$ (10) $-4<\frac{3m+2}{2}<5$

(11) $\frac{-1}{3}y\neq\frac{1}{2}$ (12) $2(p-1)-3>2p+3$ (13) $10p-8<8+7p$

س3 /

a) اذا كانت درجة زيد في امتحان الرياضيات في الشهر الاول (66) وكان يريد الحصول على معدل في الرياضيات يتراوح بين 70 ، 80 درجة فكم تتراوح الدرجة التي يجب ان يحصل عليها في الامتحان الثاني؟

b) جد مجموعة الاعداد الصحيحة التي اذا اضيفت اليها 6 كان الناتج بين $-3$ ، 7 .

س4 / استبدل علامة الاستفهام فيما يلي باحد الرمزين $<$ او $>$ .

a) اذا كانت $a-b=1$ فان $a ? b$ . b) اذا كانت $a-b=-2$ فان $a ? b$.

# 3 – 4 المعادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين

تعلمت من دراستك السابقة ان اية نقطة في المستوي الاحداثي تُمثل بزوج مرتب من الاعداد الحقيقية $(x , y)$ .

فالمعادلة التي صورتها : معاً $ax+by+c=0$ حيث $a,b,c \in R$ و معاً $a\neq0$ و $b\neq0$ تسمى معادلة خطية بمتغيرين $x , y$.

## [1 – 3 – 4] مجموعة حل المعادلة من الدرجة الاولى في متغيرين

### مثال (1)

جد مجموعة حلول المعادلة : $x+y=3$

او مجموعة الحل للنظام : $A=\{(x,y):x,y \in Z,\ x+y=3\}$

**الحل /**

نحاول ايجاد مجموعة الحل بايجاد مجموعة قيم $x , y$ والتي تحقق المعادلة $x+y=3$ كما في الجدول

| $(x, y)$ | $y$ | $x+y=3$ | $x$ |
|---|---|---|---|
| $(-1 , 4)$ | 4 | $-1+y=3$ | $-1$ |
| $(0 , 3)$ | 3 | $0+y=3$ | 0 |
| $(1 , 2)$ | 2 | $1+y=3$ | 1 |
| $(2, 1)$ ⋮ | 1 ⋮ | $2+y=3$ ⋮ | 2 ⋮ |

من الجدول واضح ان هناك مجموعة غير محددة من الازواج المرتبة $(x, y)$ بحيث ان $x+y=3$ .

وتكون مجموعة الحل .

$$s=\{(0,3),(1,2),(2,1),(-1,4)...\}$$

**تعريف [4-4] :**

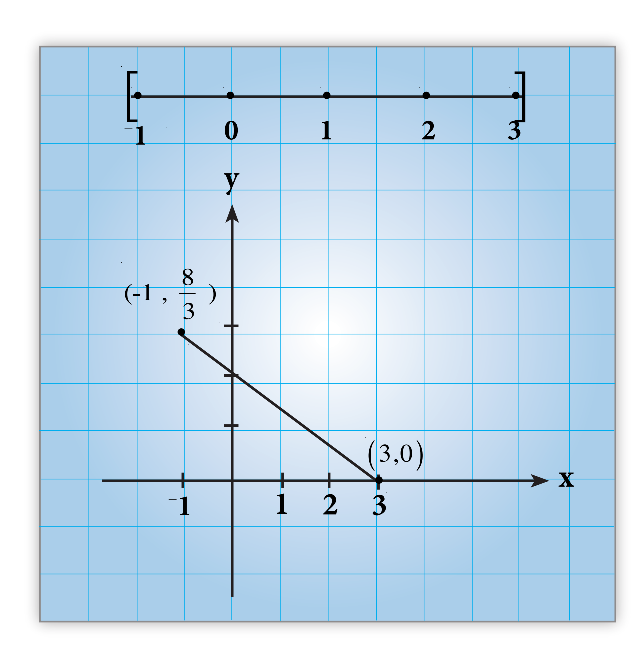
مجموعة حل المعادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين $x , y$ هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة $(x , y)$ التي تحقق الجملة المفتوحة $ax + by + c = 0$ اي التي تجعلها صائبة .

## مثال (2)

ارسم المخطط البياني للمعادلة : $2x + 3y = 6$ حيث $-1 \le x \le 3$ .

**الحل /** مجموعة قيم x

| x | 2x+3y=6 | y | (x, y) |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $-2+3y=6$ | $\frac{8}{3}$ | $(-1,\frac{8}{3})$ |
| 0 | $0+3y=6$ | 2 | $(0,2)$ |
| 1 | $2+3y=6$ | $\frac{4}{3}$ | $(1,\frac{4}{3})$ |
| 2 | $4+3y=6$ | $\frac{2}{3}$ | $(2,\frac{2}{3})$ |
| 3 | $6+3y=6$ | 0 | $(3,0)$ |

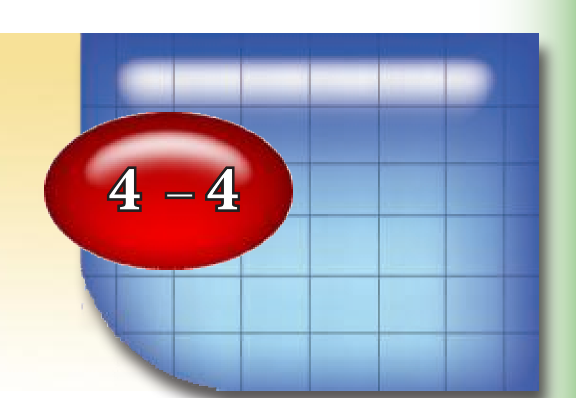



واضح ان المخطط البياني للمعادلة يمثل قطعة مستقيم محددة بالنقطتين الناتجتين من $x = -1 , x = 3$ .

**ملاحظة**

(1) لتمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين في $x , y$ نكتفي باخذ نقطتين تحققان المعادلة ويفضل ثلاث نقاط للدقة .

(2) المخطط البياني للمعادلة $ax + by + c = 0$ مستقيم او مجموعة جزئية (قطعة مستقيم اوشعاع) معتمد على مجموعة تعريف المتغير x .



# 4 – 4 حل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين انياً

لتكن $\overleftrightarrow{L_1}:a_1x+b_1y=c_1$ ، $\overleftrightarrow{L_2}:a_2x+b_2y=c_2$ معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين $x , y$ لحل هذا النظام هناك عدة طرق : بيانية وتحليلية (التعويض ، الحذف) وبطريقة المصفوفات والمحددات .

في هذه المرحلة سندرس الطريقة البيانية وطريقتي التعويض والحذف فقط .

وبشكل عام اذا كانت $S_1$ هي مجموعة حل معادلة $\overleftrightarrow{L_1}$ .

$$s_1=\{(x,y):a_1x+b_1y=c_1\}$$

$S_2$ هي مجموعة حل معادلة $\overleftrightarrow{L_2}$ .

$$s_2=\{(x,y):a_2x+b_2y=c_2\}$$

فتكون مجموعة حل النظام هي تقاطع المجموعتين $S_1 , S_2$ .

اي : $s=s_1 \cap s_2$

## اولاً الطريقة البيانية :-

### مثال (1)

جد مجموعة حل النظام : $x+y=3$ ، $x-y=1$ في $R$ .

**الحل /**

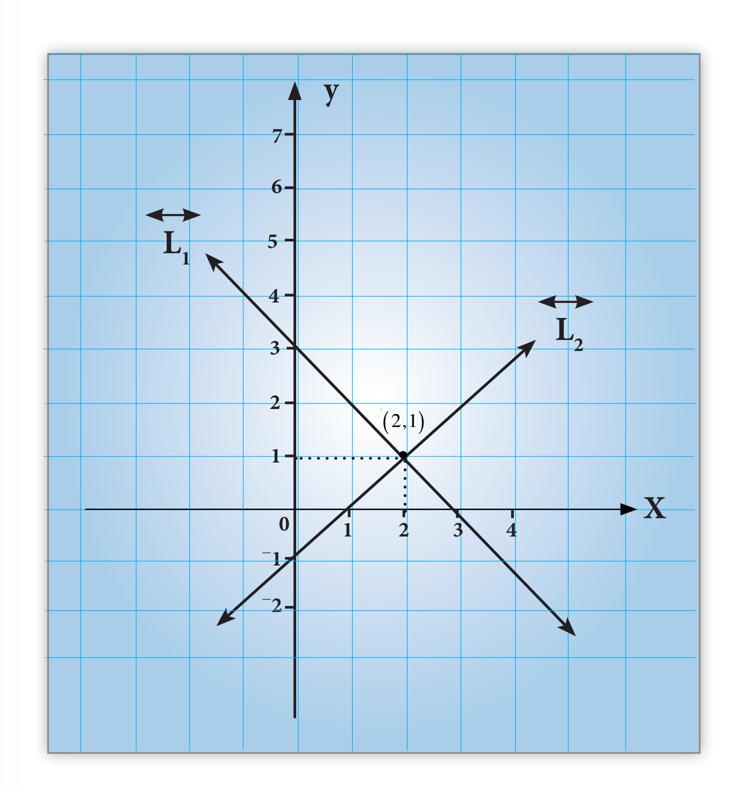
نعمل الجدول بثلاث نقاط من مجموعة التعويض $R$ :

| (x, y) | y | x |
|---|---|---|
| (0,3) | 3 | 0 |
| (1,2) | 2 | 1 |
| (2,1) | 1 | 2 |

$\overleftrightarrow{L_1}:x+y=3$

| (x, y) | y | x |
|---|---|---|
| (0,–1) | –1 | 0 |
| (1,0) | 0 | 1 |
| (2,1) | 1 | 2 |

$\overleftrightarrow{L_2}:x-y=1$




مجموعة الحل = $\{(2,1)\}$

**تتلخص طريقة الحل البياني بالاتي :**

* تمثيل كل من المستقيمين الاول والثاني في المستوي الاحداثي.
* نجد احداثي نقطة تقاطع المستقيمين برسم عمودين من النقطة على المحورين الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة حل النظام .

## ثانياً طريقة التعويض :-

ويتلخص بتحويل أحدى المعادلتين الى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين x ، y من أحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الاخرى كما في المثال الاتي :

### مثال (2)

جد مجموعة حل النظام

$$x-y=1 .........(1)$$
$$x+y=3 .........(2)$$

**الحل /** من المعادلة (1) نجد x بدلالة y :

اي ان : $x=1+y .........(3)$

نعوض الان قيمة x من (3) في المعادلة (2) لنحصل على :

$$(1+y)+y=3$$
$$1+2y=3$$
$$2y=2$$
$$\therefore \ y=1$$

نعوض قيمة ( $y=1$ ) في (3) فتكون :

$$x=1+y$$
$$x=1+1$$
$$\therefore\ x=2$$
$$s=\{(2,1)\}$$

وللتحقق من صحة الحل نعوض عن ( $x=2$ ) ( $y=1$ ) في كلتا المعادلتين وليس في احداهما لان مجموعة الحل يجب ان تحقق كلتيهما للحصول على عبارتين صائبتين .

المعادلة الاولى :

$$x-y=1 \Rightarrow 2-1=1$$
$$1=1$$

المعادلة الثانية :

$$x+y=3 \Rightarrow 2+1=3$$
$$3=3\ \checkmark$$

## مثال ( 3 )

استخدم طريقة التعويض لحل المعادلتين

$$3x+2y=12.....(1) \text{ و } 2x+3y=13.....(2)$$

**الحل /**

من المعادلة (2) :

$$2x=13-3y \Rightarrow x=\frac{13-3y}{2}$$

نعوض قيمة $x=\frac{13-3y}{2}$ في المعادلة (1) لنحصل على معادلة جديدة بمتغير واحد هو y :

$$3\left(\frac{13-3y}{2}\right)+2y=12$$

بضرب الطرفين في 2

$$3(13-3y)+4y=24$$

فك الاقواس

$$39-9y+4y=24$$

بالتبسيط

$$39-5y=24$$
$$\therefore\ -5y=-15$$
$$\frac{-5y}{-5}=\frac{-15}{-5}$$
$$\therefore\ y=3$$

نعوض قيمته $y=3$ في $x=\frac{13-3y}{2}$

نحصل على $x=2$

مجموعة الحل : $\{(2,3)\}$

ثالثاً
## طريقة الحذف :-

### مثال (4)

حل المعادلتين الاتيتين بطريقة الحذف.

$x+2y=5.....(1)$ , $3x-y=1.....(2)$

**الحل /**

لحذف أحد المتغيرين x أو y نجعل معامل أحد المتغيرين متساوياً بالقيمة ومختلفاً بالاشارة في كلتا المعادلتين.

بعد ضرب المعادلة (2) في العدد 2

بجمع 1 مع 2 نحصل على :

لأن : $(-2y)+(2y)=0$

$$\begin{array}{r} x+2y=5.....(1) \\ 6x-2y=2.....(2) \\ \hline 7x=7 \end{array}$$ بالجمع

نعوض قيمة $x=1$ في أحدى المعادلتين (يفضل بابسط معادلة من المعادلتين). $\therefore\ x=1$

$1+2y=5$

$2y=4 \Rightarrow y=2$

مجموعة الحل $s=\{(1,2)\}$

للتحقق : $y=2$ , $x=1$ نعوض في كلتا المعادلتين

### ملخص الطريقة :

1- نبسط المعادلتين (التخلص من الاقواس والكسور ، ان وجدت)

لوضعها بالصورة القياسية: $ax+by=c$

2- نجعل معامل احد المتغيرين متساوياً في المعادلتين بالقيمة العددية.

3- نجمع او نطرح المعادلتين (وفقاً لاشارة المعامل).

4- من الخطوة (3) نحصل على قيمة احد المتغيرين ثم نعوض في احدى المعادلتين للحصول على قيمة المتغير (المحذوف).

## مثال (5)

حل المعادلتين الاتيتين بطريقة الحذف.

$$2x+3y=7.....(1) \quad , \quad 3x+4y=10.....(2)$$

### الحل /

نحاول حذف x من المعادلتين كما يلي:

بضرب (1) بالعدد 3 والمعادلة (2) بالعدد 2 لنحصل على معادلتين جديدتين مكافئتين لهما.

$$\cancel{6x} + 9y = 21$$
$$\mp \cancel{6x} \mp 8y = \mp 20$$

بالطرح

$$\Rightarrow \quad y=1$$

نعوض في احدهما (قبل تغيير الاشارة) ( اي في (1) ) عن قيمة $y = 1$ :

$$2x+(3\times 1)=7$$

$$2x=4 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$s=\{(2,1)\}$$

يمكن للطالب التحقق من صحة الناتج.

## مثال (6)

حل المعادلتين الاتيتين بطريقة الحذف اولاً ثم بيانياً ثانياً :

$$3x-y=6 \quad ........(1) \quad , \quad x-y=4.........(2)$$

اولاً :

بطريقة الحذف: نضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد (1−) لنتمكن من حذف المتغير y :

$$3x \cancel{-y} = 6 \quad ......(1)$$
$$-x \cancel{+y} = -4.......(2)$$

بالجمع

$$2x=2 \Rightarrow x=1$$

نعوض في (2) أصلاً : او في (1) :

$$1-y=4 \Rightarrow y=-3$$
$$s=\{(1,-3)\}$$

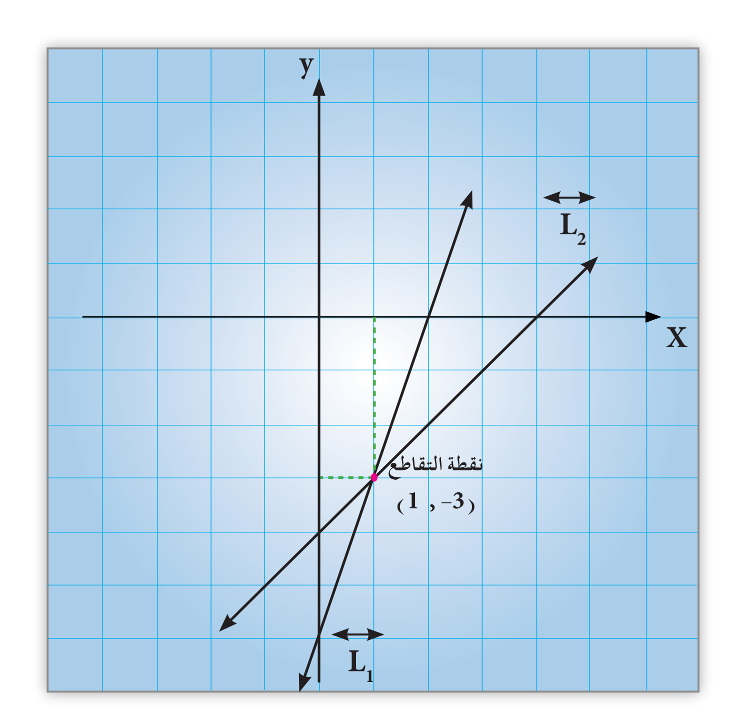
الحل بيانياً :

$L_2: x-y=4$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 0 | −4 | (0,−4) |
| 4 | 0 | (4,0) |

$L_1: 3x-y=6$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 0 | −6 | (0,−6) |
| 2 | 0 | (2 , 0) |



## مثال (7)

حل المعادلتين الآتيتين بطريقة الحذف :

$$\frac{1}{2}(x+2)-\frac{1}{3}(y-2)=3 \;........1$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=0 \;........2$$

**الحل/** نتخلص من الكسور في كلتا المعادلتين وذلك بضرب طرفي المعادلة (1) بالعدد 6 (LCM) والمعادلة (2) بالعدد 4 . ونبسط :

$$\Rightarrow (6)\times\frac{1}{2}(x+2)-(6)\times\frac{1}{3}(y-2)=6\times 3$$

$$\Rightarrow 3(x+2)-2(y-2)=18$$

$$3x-2y+10=18$$

$$3x-2y=8 \;........1$$

$$(4)\times\frac{1}{4}x+(4)\times\frac{1}{2}y=0$$

$$\Rightarrow x+2y=0$$

$$3x-2y=8$$ بالجمع

$$4x=8 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

نعوض بالمعادلة (2)

$$\left(\frac{1}{4}\right)\times 2+\frac{1}{2}y=0$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y=0$$

بالضرب في 2 نحصل على

$$1+y=0 \quad\Rightarrow\quad y=-1$$

$$\therefore s=\{(2,-1)\}$$




س1 / حل كلاً من المعادلتين الآتيتين بطريقة التعويض :

a) $\left.\begin{array}{l}2x+3y=13\\3x-2y=0\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}x-2y=11\\2x-3y=18\end{array}\right\}$

س2 / حل كلاً من المعادلتين الآتيتين بطريقة الحذف :

a) $\left.\begin{array}{l}3x-4y-12=0\\5x+2y+6=0\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}0.1x-3y=12\\0.2x-4y=24\end{array}\right\}$

ثم تحقق من صحة الحل .

س3 / حل كلاً معادلتين مما يأتي بيانياً وحقق الناتج بطريقة أخرى :

a) $3x+2y=12$
$x+y=5$

b) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=2$
$2(x+1)+3(y-3)=2$

س4 / هل ان $\{(3,2)\}$ مجموعة حل المعادلتين الانيتين بين ذلك :

$\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=1$

$\frac{3y}{2}+\frac{x}{3}=4$

س5 / اذا كانت $\{(2,-1)\}$ هي مجموعة حل المعادلتين: $2x-ay=3$ ، $bx-2y=-2$

جد $a , b$ حيث $a , b$ ثوابت حقيقية



# 5 – 4 المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية بمتغير واحد x هي : $ax^2+bx+c=0$ حيث $(a\neq0)$ ، $a,b,c \in R$ .

مثلاً : $x^2-3x+1=0$ ، $y^2-\sqrt{2}y-1=0$ ، $m^2-m=0$

هي أمثلة لمعادلة من الدرجة الثانية لمتغير واحد x , y , m على الترتيب وحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ يعني ايجاد مجموعة قيم x التي تحقق المعادلة (تجعلها صائبة) ضمن مجموعة تعويض معلومة وهناك طرق مختلفة لحل المعادلة التربيعية بمتغير واحد ومنها :

## اولاً طريقة التحليل :-

وذلك بوضع المقدار $(ax^2+bx+c)$ ان امكن على صورة حاصل ضرب عاملين كل منهما من الدرجة الاولى اي ان :

$$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=0$$

ثم نستخدم خاصية العامل الصفري والتي تنص على أن:

اذا كان : $ab=0$

اما $a=0$

او $b=0$

$$a_1x+c_1=0 \Rightarrow x=\frac{-c_1}{a_1}$$

$$a_2x+c_2=0 \Rightarrow x=\frac{-c_2}{a_2}$$

وتكون مجموعة الحل $S=\left\{\frac{-c_1}{a_1}, \frac{-c_2}{a_2}\right\}$

وكما درسنا الطرق المختلفة لتحليل الحدوديات الثنائية : الفرق بين مربعين ، تحليل الحدوديات الثلاثية (التجربة ، المربع الكامل) ، الحدوديات الرباعية (التجزئة) .

## مثال ( 1 )

حل المعادلات الاتية بطريقة التحليل :

a) $x^2-25=0$ b) $2x^2-3x=0$

### الحل/

a) $x^2-25=0 \Rightarrow (x-5)(x+5)=0$

اما $:x-5=0 \Rightarrow x=5$

او $:x+5=0 \Rightarrow x=-5$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{5,-5\}$

**ملاحظة**

نذكر تحليل الفرق بين مربعين .

1 ) $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

2 ) يمكن حل المثال 1 بطريقة الجذر التربيعي وهي :

اذا كانت $k \in R$ ، $k>0$ وكانت $x^2=k$

فان : $x=\sqrt{k}$ او $x=-\sqrt{k}$

اي اذا كان : $x^2=25$

$\therefore x=\mp\sqrt{25}$

$x=\mp5$

$\therefore S=\{5,-5\}$

b) $2x^2-3x=0$

$x(2x-3)=0$ تحليل باخراج عامل مشترك

اما : $x=0$

او : $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$

## مثال ( 2 )

حل المعادلات الاتيه :

a) $(x-2)^2 - 9=0$

b) $(1-2y)^2 - 4=0$

c) $(2w+a)^2 -4a^2=0$

d) $\left(\frac{1}{y+1}\right)^2 - \frac{1}{4}=0$

**الحل/**

a) $(x-2)^2 - 9=0$ ( المعادلة )

$x^2-4x+4-9=0$ (فك الاقواس)

$x^2-4x-5=0$ ( تبسيط )

$(x-5)(x+1) = 0$ (تحليل تجربة)

اما : $x-5=0 \Rightarrow x=5$

او : $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-1,5\}$

### تدريب للطالب

حقق صحة الاجابة بالتعويض عن $x = 5 , x = -1$ .

b) $(1-2y)^2 - 4=0$ ( المعادلة )

$1-4y+4y^2-4=0$ ( فك الاقواس )

$4y^2-4y-3=0$ ( تبسيط )

$(2y+1)(2y-3)=0$ ( تحليل تجربة )

اما : $y = \frac{-1}{2}$

او : $y = \frac{3}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

c) $(2w+a)^2 -4a^2=0$ ( المعادلة )

$[(2w+a)-2a]\,[(2w+a)+2a]=0$ ( تحليل الفرق بين مربعين )

$(2w-a)(2w+3a) = 0$ ( تبسيط )

اما : $2w-a=0$

$\therefore\ w=\frac{a}{2}$

او : $2w+3a = 0$

$\therefore\ w=\frac{-3a}{2}$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{a}{2}, \frac{-3a}{2}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{y+1}\right)^2 - \frac{1}{4} =0$ ( المعادلة )

$\left[\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2}\right]=0$ ( تحليل الفرق بين مربعين )

اما : $\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} =0$

$$\frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}$$ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$y+1=2$$
$$y=1$$

او : $$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{y+1} = \frac{-1}{2}$$
$$-y-1=2$$
$$\therefore y=-3$$

مجموعة الحل = $\{-3,1\}$

## مثال (3)

حل المعادلات الاتية بالتحليل :

a) $x(x-2)=35$

b) $2x^2-12=5x$

c) $\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{4}x$

d) $2x(-3+x)=5x-9$

e) $0.1x^2 - 0.4x + 0.4 = 0$

f) $(3x+1)^2=(3x+1)$

**الحل/**

a) $x(x-2)=35$

$$x^2-2x-35=0$$
$$(x-7)(x+5) = 0$$

اما : $x-7=0 \Rightarrow x=7$  او : $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{7,-5\}$

**ملاحظة** يمكن التحقق من صحة الناتج بالتعويض بالمعادلة الاصلية .

b) $2x^2-12=5x$

$2x^2-5x-12=0$

$(2x+3)(x-4)=0$

اما : $2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$

او : $x-4=0 \Rightarrow x=4$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{-3}{2}, 4\right\}$

c) $\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{4}\mathbf{x}$

نتخلص من الكسور بضرب طرفي المعادلة في **LCM = 12**

$12\left(\frac{1}{3}x^2\right)=12\left(\frac{3}{4}x\right)$

$4x^2=9x$ ( تبسيط الطرفين )

$\Rightarrow 4x^2-9x=0$

$x(4x-9)=0$

اما : $x=0$

او : $\Rightarrow 4x-9=0 \Rightarrow x=\frac{9}{4}$

مجموعة الحل = $\left\{0, \frac{9}{4}\right\}$

d) $\mathbf{2x}(-3+x)=5x-9$

$-6x+2x^2-5x+9=0$ ( تبسيط الطرفين )

$2x^2-11x+9=0$

$(2x-9)(x-1)=0$

اما : $2x-9=0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

او : $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{9}{2}, 1\right\}$

**e)** $0.1x^2 - 0.4x + 0.4 = 0$

بضرب طرفي المعادلة في **10** للتخلص من الكسور

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x - 2)^2 = 0$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{2\}$

**f)** $(3x+1)^2 = (3x+1)$

$$(3x+1)^2 - (3x+1) = 0$$
$$(3x+1)\ [(3x+1) - 1] = 0$$

اما : $3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

او : $3x=0 \Rightarrow x=0$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{-1}{3}, 0\right\}$

**تمرين للطالب**

حاول بطريقة اخرى : فك الاقواس واكمال الحل.

ويمكن كذلك حل المعادلة بفرض ان : $y = (3x + 1)$ لتصبح المعادلة الاصلية بالشكل : $y^2 = y$ ثم نكمل الحل.

## ثانياً : طريقة اكمال المربع
## To Solve a Quadratic Equation by Completing the Square

لإيجاد مجموعة الحل بهذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية :

1 – نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2+bx=-c$ . حيث $a\neq0$

2 – اذا كان $a\neq1$ ، نقسم طرفي المعادلة على **a** .

3 – نضيف الى طرفي المعادلة المقدار $\left(\frac{1}{2}\ \text{معامل}\ x\right)^2$ .

4 – نحلل الطرف الايسر والذي اصبح مربعاً كاملاً بعد الخطوة 3 ونبسط الطرف الايمن .

5 – نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم **x** .

### مثال ( 4 )

حل المعادلة $2x^2-3=3x$ بطريقة اكمال المربع .

**الحل /**

$2x^2-3=3x$ ( المعادلة )

$2x^2-3x=3$ (وضع المعادلة بالصورة المطلوبة)

$x^2-\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}$ ( بقسمة الطرفين على 2 )

الحد المضاف = $\left(\frac{-3}{2}\times\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}$

باضافة $\frac{9}{16}$ للطرفين $\therefore x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{3}{2}+\frac{9}{16}$

تحليل الطرف الايسر ونبسط الايمن $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$

خاصة الجذر التربيعي $\therefore x-\frac{3}{4}=\mp\frac{\sqrt{33}}{4}$

اما : $x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}=\frac{3+\sqrt{33}}{4}$

أو : $x=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4}=\frac{3-\sqrt{33}}{4}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{\frac{3+\sqrt{33}}{4},\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right\}$

## ثالثاً : طريقة القانون (الدستور) (الاشتقاق للاطلاع فقط)

الصورة العامة للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq0$

تسمى ايضاً الصورة القياسية $ax^2+bx=-c$

بالقسمة على **a** $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a}$

باضافة مربع نصف معامل **x** للطرفين

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{1}{2}\times\frac{b}{a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{b}{a}\right)^2$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

تحليل الطرف الايسر ونبسط الطرف الايمن

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اما : $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

او : $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$

وبذلك تكون مجموعة حل المعادلة التربيعية في **x**:

قانون المعادلة التربيعية

$$\boxed{x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

يسمى المقدار: $\left(b^2-4ac\right)$ بالمقدار المميز ويرمز له بالرمز $(\Delta)$ (دلتا) **Delta** $\Delta=b^2-4ac$

## مثال ( 5 )

حل المعادلة الاتية بالقانون ( الدستور) $x^2-3x=5$

**الحل/**

1) وضع المعادلة بالصورة العامة $x^2-3x-5=0$ .

2) تعيين المعاملات **c , b , a** حيث(الحد المطلق) $c=-5$ (معامل x) $b=-3$ , (معامل $x^2$) $a=1$

3) نعوض عن **c , b , a** بالقانون :
$$x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-(-3)\mp\sqrt{(-3)^2-(4\times 1\times -5)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{3\mp\sqrt{29}}{2}$$

اما : $x=\frac{3+\sqrt{29}}{2}$

او : $x=\frac{3-\sqrt{29}}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{3+\sqrt{29}}{2},\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right\}$

## رابعاً المقدار المميز The Discriminant $\Delta$

عرفنا ان المقدار المميز للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ هو $\Delta = b^2-4ac$ , فان نوع جذري المعادلة تتعين كما يلي:

| نوع الجذرين | $\Delta=(b^2-4ac)$ |
|---|---|
| جذران حقيقيان نسبيان | موجب ومربعاً كاملاً |
| جذران حقيقيان غير نسبيين | موجب ليس مربعاً كاملاً |
| جذر حقيقي واحد $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ | صفر |
| جذران غير حقيقيين ( تخيليان) | سالب |

$\therefore$ مجموعة الحل في $R = \varnothing$

**ملاحظة**

مع ملاحظة انه اذا كانت a , b , c اعداداً صحيحة فان المقدار $\left(ax^2+bx+c\right)$ يمكن تحليله اذا كان المميز مربعاً كاملاً .

**مثلاً :** المعادلة : $2x^2+3x-2=0$

$a=2,\ b=3,\ c=-2$

$\Delta = b^2-4ac$

$=9-\left(4 \times 2 \times -2\right)=25$

والعدد 25 مربعاً كاملاً $= 5^2$

المقدار $2x^2+3x-2$

يمكن تحليله $\left(2x-1\right)\left(x+2\right)$

## مثال (6)

ما قيمة الثابت m التي تجعل جذري المعادلة $x^2-\left(m+1\right)x+4=0$ متساويين ؟

**الحل/**

يكون جذري المعادلة متساويين عندما $\Delta$ ( المميز ) = 0

$a=1,\ b=-\left(m+1\right),\ c=4$

$\Delta=\left[-\left(m+1\right)\right]^2-4 \times 1 \times 4=\left(m+1\right)^2-16$

$\Delta=0 \Rightarrow \left(m+1\right)^2-16=0$

$\therefore \left(m+1\right)^2=16 \Rightarrow m+1=\mp 4$

اما : $m=3$

او : $m=-5$

**ملاحظة**

تحقق بالتعويض عن قيمة m بالمعادلة الاصلية لتجد ان للمعادلة حل واحد لكل قيمة من قيم m .

## مثال (7)

بين ان المعادلة $x^2+10=2x$ ليس لها حل في $\mathbf{R}$ .

### الحل/

المعادلة التربيعية ليس لها حل في $\mathbf{R}$ عندما $\Delta$ (المميز) يساوي عدداً سالباً $(\Delta<0)$.

نضع المعادلة بالصورة العامة : $x^2-2x+10=0$

حيث : $c=10,\ b=-2,\ a=1$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-2)^2-4\times1\times10$$
$$=-36 \quad (\text{سالب})$$
$$\because \Delta=-36<0$$

المعادلة ليس لها حل في $\mathbf{R}$ .

## مثال (8)

ما قيمة الثابت $\mathbf{m}$ التي تجعل جذري المعادلة $y^2-16=m(y+4)$ متساويان ؟

### الحل/

يكون جذرا المعادلة التربيعية متساويان اذا كان $\Delta=0$ .

المعادلة بالصورة العامة $y^2-16=my+4m$

$$y^2-my-16-4m=0$$
$$a=1\ ,\ b=-m,\ c=-16-4m$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-m)^2-4\times1\times(-16-4m)$$
$$=m^2+16m+64$$

نجعل $\Delta=0$

$$\Rightarrow m^2+16m+64=0$$
$$(m+8)^2=0$$
$$\therefore m=-8$$

## مسائل يؤدي حلها الى معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد : -

### مثال ( 9 )

اذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار ( **2m** ) على ضعف عرضه وكانت مساحته ( **$480m^2$** )

جد بعدي الملعب .

**الحل/**

نفرض عرض الملعب = **y**

طول الملعب = **2y+2**

مساحة الملعب (مستطيلة الشكل) = الطول × العرض

$$y(2y+2)=480$$

$$2y^2+2y=480$$

$$y^2+y-240=0$$ بالقسمة على **2**

$$(y+16)(y-15)=0$$

اما : $y=-16$ يهمل

او : $y=15$

العرض = $15m$

الطول = $2y+2$

= $2\times 15+2$

∴ الطول = $32m$

## مثال (10)

جد العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار (12) .

**الحل/**

نفرض العدد $x$ ، مربعه $= x^2$

$$\therefore\ x^2 - x = 12$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$

اما : $x = 4$

او : $x = -3$

## مثال (11)

أذا اراد راكب دراجة قطع مسافة (60km) بين مدينتين A , B بسرعة معينة ولو زادت سرعته بمقدار (10 km / h) لتمكن من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الاول . جد سرعته اولاً .

**الحل /**

نفرض سرعته الاولى $= V$

$\therefore$ سرعته الثانية $= V + 10$

الزمن الاول $= \dfrac{60}{V}$

الزمن الثاني $= \dfrac{60}{V+10}$

$\therefore$ الزمن الأول − الزمن الثاني $= 1$

ملاحظة

الزمن = المسافة / السرعة

$$\frac{60}{V} - \frac{60}{V+10} = 1$$

بضرب الطرفين في LCM : $V(V+10)$

$$60(V+10) - 60V = V(V+10)$$

$$60V + 600 - 60V = V^2 + 10V$$

$$\Rightarrow V^2 + 10V - 600 = 0 \Rightarrow (V+30)(V-20) = 0$$

$\therefore V = -30$ تهمل ، $V = 20$ km/h سرعته أولاً

## مثال (12)

قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ( x cm ) قطعت أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع ( 4cm ) وثنيت بعدها فتكون صندوق بدون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه ( $16cm^3$ ) جد مساحةالقطعة الاصلية .

**الحل /**

واضح من الشكل ان ابعاد الصندوق : 4 الارتفاع ، ( x − 8 ) بعدي القاعدة .

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول × العرض × الارتفاع .

$\therefore 4(x-8)(x-8) = 16$ بالقسمه على 4

$\therefore (x-8)^2 = 4$ باخذ الجذر التربيعي

$\therefore x-8 = \mp 2$

اما : $x=10$

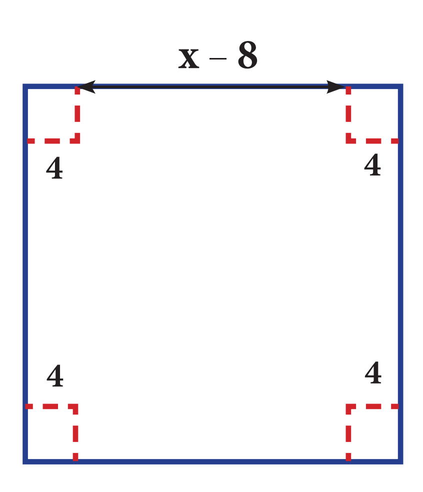
او : $x=6$

وللتحقق أي من الاجابتين تطابق معطيات المسأله نلاحظ ان $x = 6$ يجب اهمالها لانها تعطي طول ضلع القاعدة ( x−8 ) عددا سالباً ( − 2 ) وهو غير ممكن .

( حاول تفسير اهمال $x = 6$ بطريقة أخرى )

$\therefore$ طول ضلع القطعة الاصليه ( $x = 10$ )

وتكون مساحتها = $10^2$ = $100\ cm^2$



# 4 – 6 المعادلات الكسرية

درسنا سابقاً المعادلات الحدودية ( المتغير في الاساس ) مثلاً $x^2 - x - 2 = 0$ ، $x^2 - 4 = 0$ .... الخ

سوف ندرس الان المعادلات الكسرية ( معادلات متغيرها في مقام الكسر ) .

حل كلا من المعادلات الاتيه وحقق صحة الحل :

a) $5x+\frac{x-2}{3x}=\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{y+2}-\frac{y}{2-y}=\frac{y^2+4}{y^2-4}$

c) $\frac{6}{x-2}+\frac{x}{2-x}=3$

**الحل /**

نضرب طرفي المعادلة في LCM للمقامات (3x) للتخلص من الكسور :

a) $5x+\frac{x-2}{3x}=\frac{2}{3}$

$$3x(5x)+3x\left(\frac{x-2}{3x}\right)=3x\left(\frac{2}{3}\right)$$

$15x^2+x-2=2x$ تبسيط

$15x^2-x-2=0$

$(5x-2)(3x+1)=0$ تحليل بالتجربة

اما : $5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$

او : $3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

التحقيق : نعوض بالمعادلة عن $x=\frac{-1}{3}$ , $x=\frac{2}{5}$ $\Leftarrow$ $x=\frac{-1}{3}$

الطرف الايسر $=\left(5\times\frac{-1}{3}\right)+\frac{\frac{-1}{3}-2}{3\times\frac{-1}{3}}$

$$= \frac{-5}{3} + \frac{\frac{-7}{3}}{-1}$$

$$= \frac{-5}{3} + \frac{7}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$ = الطرف الايمن

$\therefore\ x = \frac{-1}{3}$ جذر للمعادلة

$x = \frac{2}{5}$ كذلك يمكن التحقق بسهولة عندما

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{-1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$

**b )** $\frac{2}{y+2} - \frac{y}{2-y} = \frac{y^2+4}{y^2-4}$ : قبل ضرب طرفي المعادلة في **LCM** للمقامات نحاول تغيير المقام

**2−y** حيث $2-y=-(y-2)$

| معلومة $a-b=-(b-a)$ |
|---|

$\therefore$ المعادلة تصبح بالشكل الاتي :

$$\frac{2}{y+2} - \frac{y}{-(y-2)} = \frac{y^2+4}{y^2-4}$$

$$\frac{2}{y+2} + \frac{y}{y-2} = \frac{y^2+4}{(y-2)(y+2)}$$

لاحظ :

$$y^2-4=(y-2)(y+2)$$

بضرب طرفي المعادلة في **LCM** $((y-2)(y+2))$

$$2(y-2) + y(y+2) = y^2+4$$

تبسيط الطرفين

$$2y-4+y^2+2y-y^2-4=0$$

$$4y-8=0 \Rightarrow y=2$$

عند التعويض عن $y = 2$ بالمعادلة الاصلية تحصل على عملية قسمة على الصفر وهذا غير جائز لذلك فالمعادلة ليس لها حل في $R$ .

$$\left(\frac{2}{0} = \frac{y}{2-y}\right)$$

مجموعة الحل = $\varnothing$

**ملاحظة**

عند ضرب طرفي معادلة بمقدار يحتوي على متغيرها يجب التحقق من صحته لان عملية الضرب لا تؤدي بالضرورة الى معادلة مكافئة للاصل . كذلك عملية رفع طرفي المعادلة الى القوى .

**c )** $\frac{6}{x-2} + \frac{x}{2-x} = 3$

**الحل /** الطريقة الصحيحة ( **Correct Method** ) : بضرب طرفي المعادلة في ( **L . C . M** ) للمقامات وهو ( $X - 2$ ) نحصل على المعادلة المكافئة الاتية :

$$(x-2)\frac{6}{x-2} + (x-2)\frac{x}{-(x-2)} = 3(x-2)$$

$$6-x = 3x-6$$

$$4x = 12$$

$$\therefore x = 3$$

**ملاحظة**

لاحظ عزيزي الطالب أن : $x - a = -(a - x)$

وبالتعويض في المعادلة اصلاً نلاحظ ان 3 جذراً للمعادلة : $S = \{3\}$ .

أما الطريقة غير الصحيحة هي أن نضرب طرفي المعادلة بالمقدار ( $2 - x$ ) ( $x - 2$ ) والذي **لا** يمثل المضاعف الصحيح لاننا سوف نحصل على $x = 3$ , $x = 2$ وقيمة $x = 2$ لا تحقق المعادلة الاصلية ولذلك يجب استبعادها .

$$\therefore S = \{3\}$$




س1 / حل كلا من المعادلات الاتية :

1 – $(x+1)(x-3) = 12$

2 – $y^2=7y$

3 – $3t^2-4=-11t$

4 – $(2x-1)^2 = (2x-1)$........ باكثر من طريقة

5 – $x^2-5=3x$ بالدستور

6 – $4x^2+9=12x$

7 – $\frac{1}{3}x^2=\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}$........ بالدستور

س2 / طول مستطيل يقل عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار ( 1m ) فاذا كانت مساحة المستطيل ( $44m^2$ )

جد ابعاد المستطيل .

س3 / ثلاثة أعداد موجبة $(x+1)$ ، x ، $(x-1)$ مجموع مربعاتها يساوي ( 149 ) .

جد هذه الاعداد .

س4 / ما العدد الذي اذا اضيف ( 5 ) الى مربعه كان الناتج ( 30 ) ؟

س5 / مثلث طول قاعدته يزيد عن ارتفاعه بمقدار ( 1cm ) فاذا زاد كل من أرتفاعهُ وقاعدتهُ بمقدار ( 2cm )أصبحت مساحته ( $21cm^2$ )جدطول القاعدة والارتفاع .

س6 / قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ( y cm ) قطعت من زواياها اربعة مربعات متساوية طول ضلع كل منها ( 2cm ) وثنيت بعدها فتكون صندوق على شكل متوازي سطوح مستطيله بدون غطاء حجمه ( $242\ cm^3$ ) . جد طول القطعة المربعة .

س7 / مثلث قائم الزاويه طول أحد ضلعيه القائمين يزيد ( 2cm ) عن الضلع القائم الاخر وطول وتره يقل ( 2cm )عن ضعف طول الضلع القائم الصغير . جد أطوال اضلاع المثلث وما مساحته .

س8 /

a- ما قيمة الثابت ( m ) التي تجعل للمعادلة جذرين متساويين ؟

$$m\left(y^2+y+1\right)=y+1$$

b- ماقيمة الثابت ( n ) التي تجعل جذري المعادلة متساويين ؟

$$w^2-16=n\left(w+4\right)$$

س9 / حل المعادلات الاتية وحقق صحة الاجابة في كل منها :

a) $\frac{3y+5}{2y-1}=\frac{6y+2}{5y-4}$

b) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2-x}=\frac{2}{x^2-4}$

c) $\frac{y-7}{y^2-2y}=\frac{y}{y-2}-\frac{y+4}{y}$

d) $\frac{2y}{1-3y}=\frac{5}{3y-1}$

# 5 الفصل الخامس

# الهندسة

## المثلث Triangle

[5-1] مراجعة .

[5-2] منصفات زوايا المثلث .

[5-3] القطع المتوسطة للمثلث .

| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
|---|---|
| الزاوية | Angle $\angle$ |
| الضلع | Side S |
| علاقة التطابق | $\cong$ |
| قياس الزاوية A | $m\angle A$ |



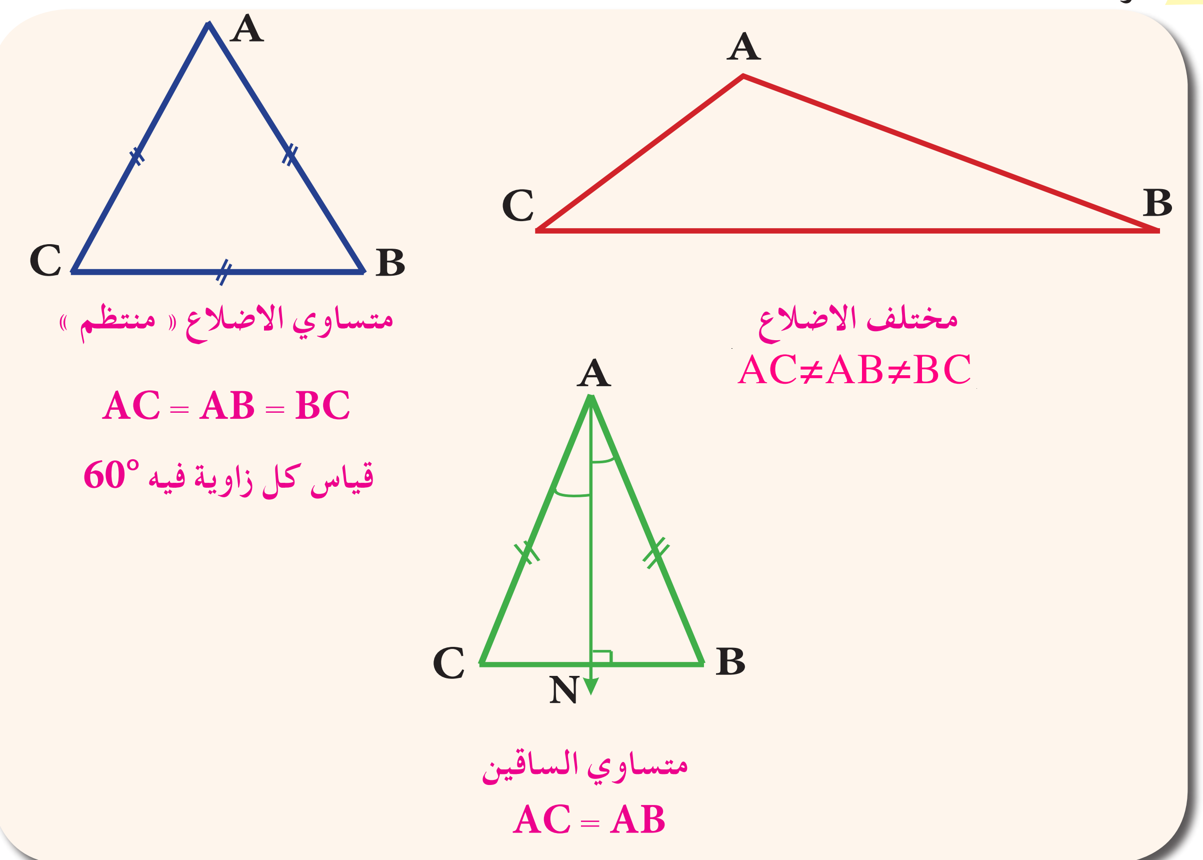

# مراجعة

في مراحل دراسية سابقة تعرفنا على مفاهيم هندسية أساسية ودرسنا بشئ من التفصيل بعض الاشكال الهندسية المعروفة وخواصها وتطبيقاتها في المسائل الحياتية المختلفة ومن هذه الأشكال: الدائرة، المربع والمثلث . . الخ.

وسوف نتطرق في هذه المرحلة الى المثلث والدائرة من زوايا مختلفة.




**a** نوعه بالنسبة لاضلاعه:



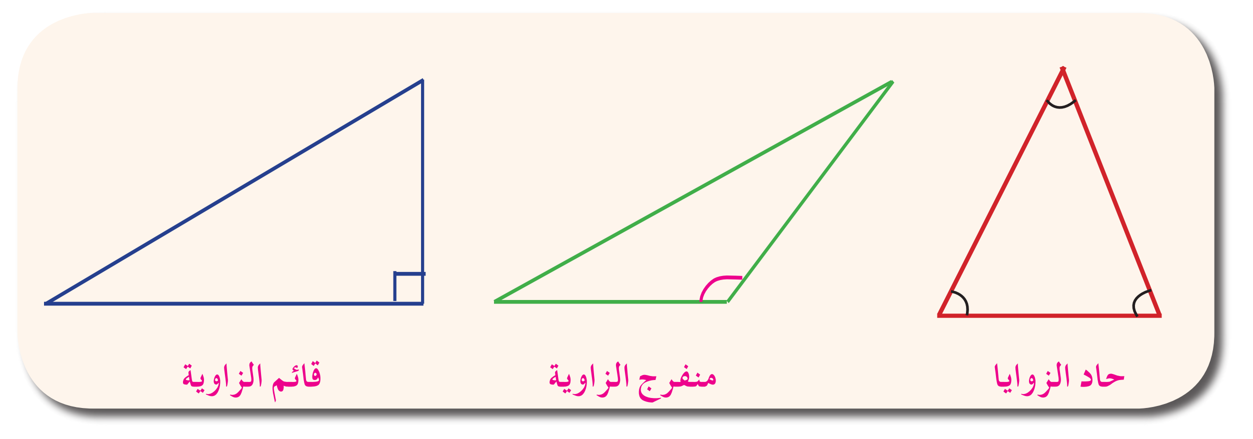

ومن خواص المثلث المتساوي الساقين:

1) زاويتي القاعدة متطابقتان ($m\angle C = m\angle B$).

2) منصف زاويه الرأس A عمودي على القاعدة $\overline{BC}$ وينصفها.

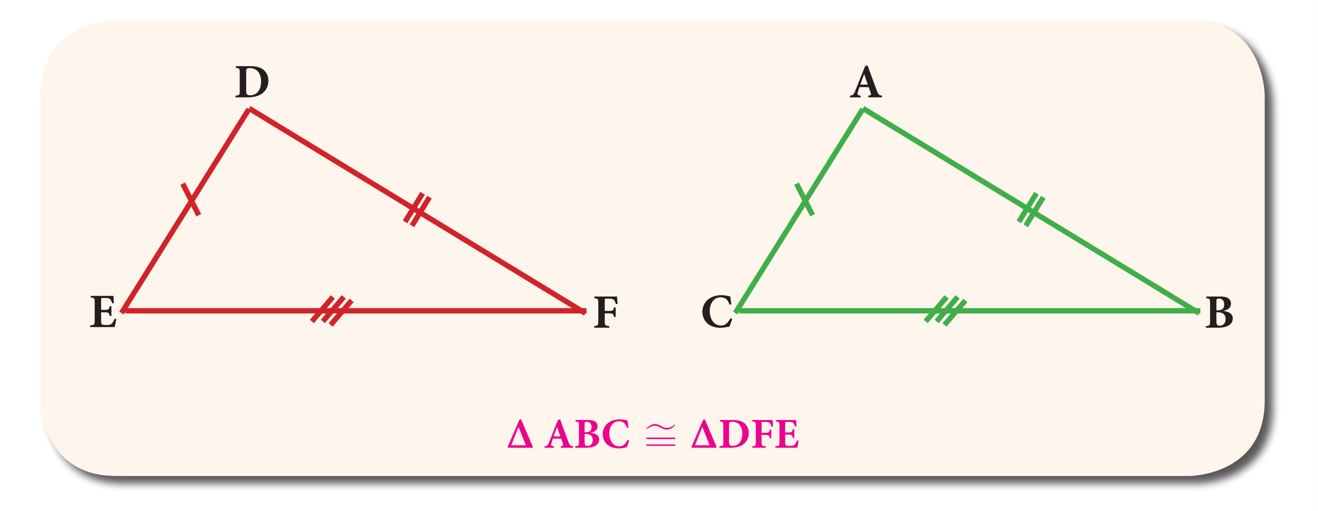
$\overrightarrow{AN}$ ينصف $\overline{CB}$ وعمودي عليه، $\overrightarrow{AN} \perp \overline{BC}$ ، $NB = CN$

**b** نوعه بالنسبة لزواياه :

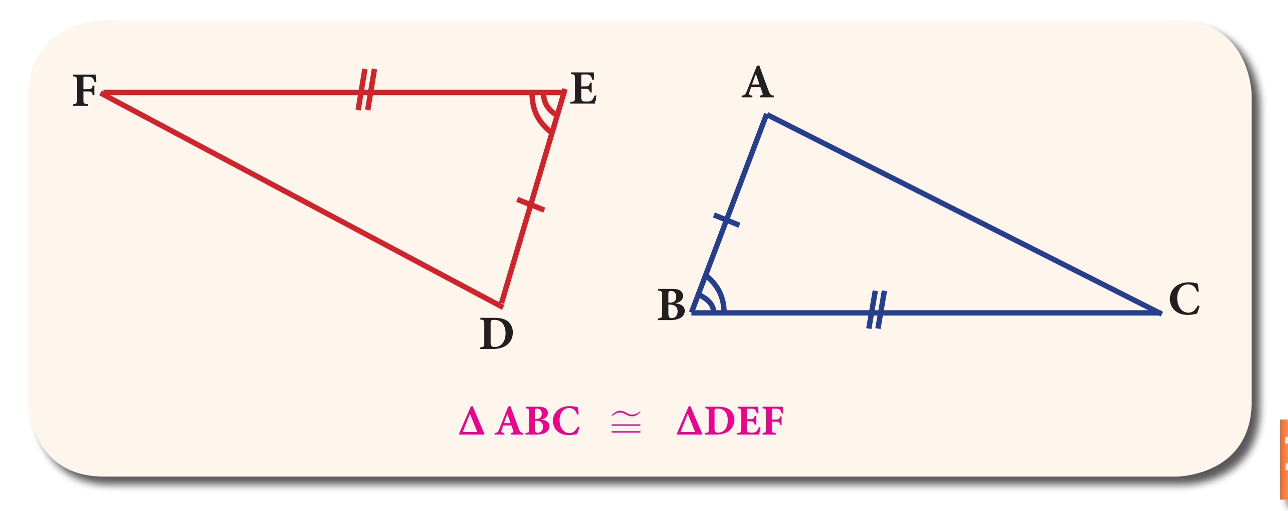



## حالات تطابق المثلثين :

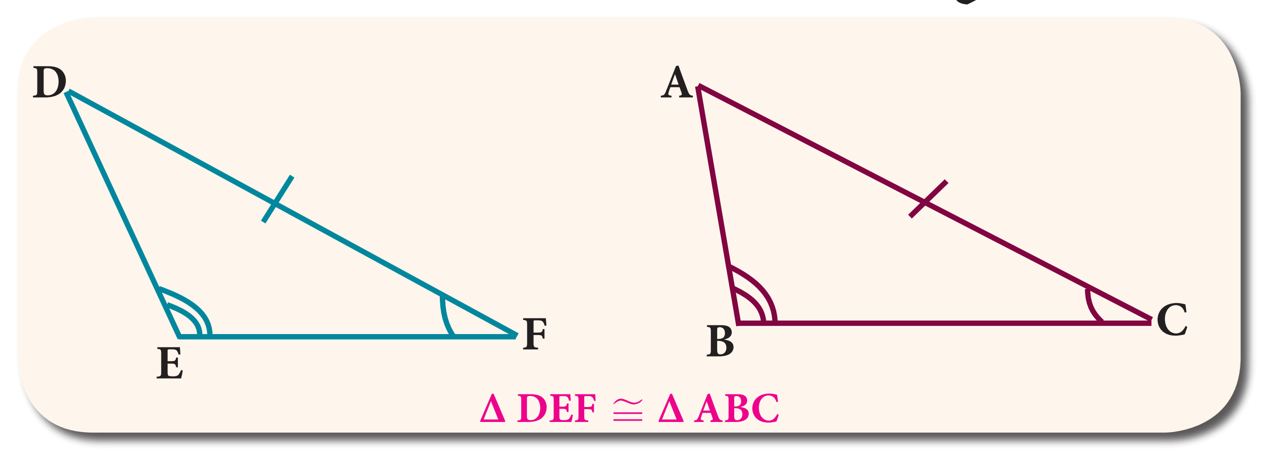
**1)** تطابق بالاضلاع الثلاثة : ( S S S ) ، S : side .



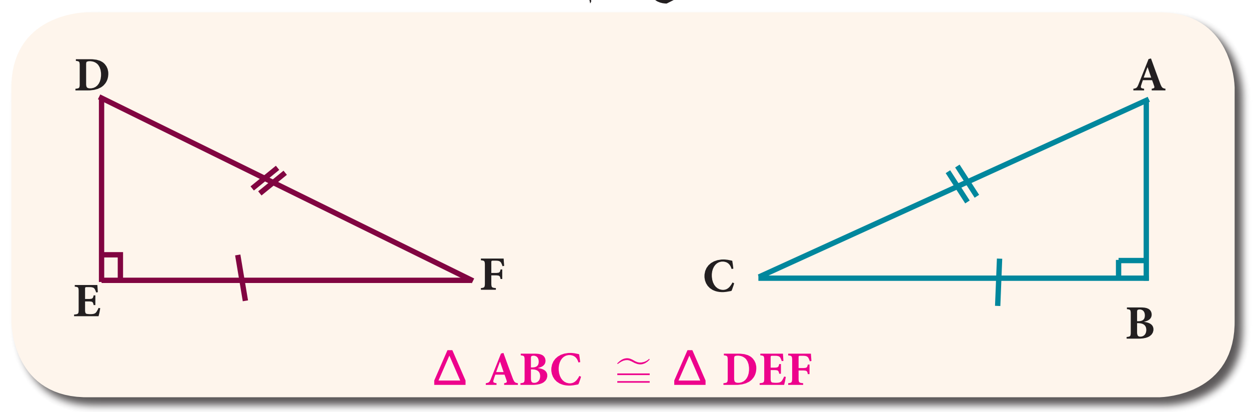

**2)** تطابق بضلعين والزاوية المحددة بهما ( محصورة بينهما ) . S.A.S



3) تطابق بزاويتين وضلع مناظر (A.A.S)




4) يتطابق المثلثان القائما الزاوية بوتر وضلع قائم.

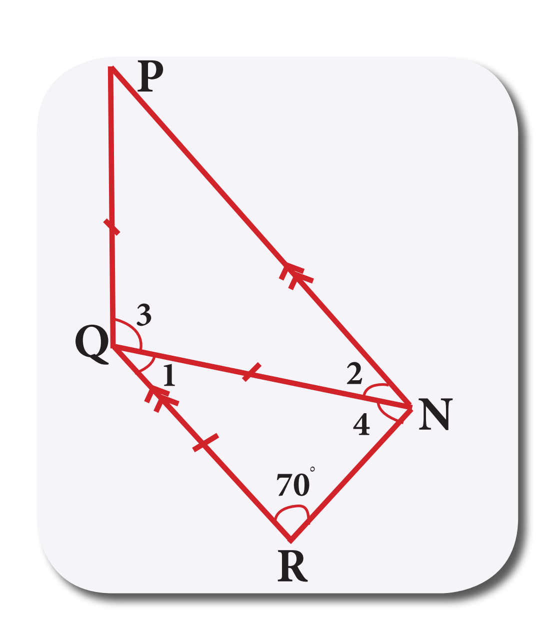



## مثال (1)

في الشكل المجاور: PQRN شكل رباعي فيه :

$QR = QN = PQ$ , $\overline{RQ} \parallel \overline{NP}$

$m\angle R = 70°$ جد : $m\angle 3, m\angle 2, m\angle 1$




**الحل/** $\because QR = QN$ معطى

$\therefore m\angle R = m\angle 4$ خواص $\Delta$ متساوي الساقين

$\therefore m\angle 4 = 70°$

$m\angle 1 = 180° - (70° \times 2)$ مجموع زوايا المثلث

$\therefore m\angle 1 = 40°$

$\overline{RQ} \parallel \overline{NP}$ معطى

$\therefore m\angle 2 = m\angle 1$ (متبادلة)

$\therefore m\angle 2 = 40°$

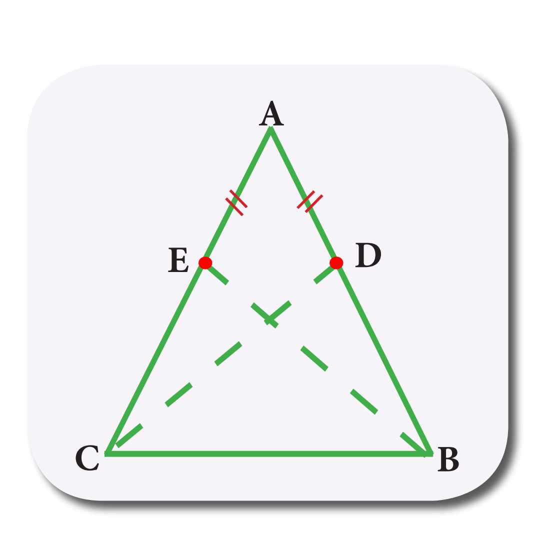
مثلث متساوي الساقين $m\angle p = m\angle 2 = 40^\circ$

مجموع زوايا المثلث $m\angle 3 = 180^\circ - (40^\circ \times 2)$

$\therefore m\angle 3 = 100^\circ$

## مثال ( 2 )

في الشكل المجاور:




ABC مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC$

$E \in \overline{AC}$ , $D \in \overline{AB}$ بحيث ان $AD = AE$

أثبت ان : $\Delta ADC \cong \Delta AEB$

المعطيات / } تترك للطالب

م. أثباته /

البرهان / $\Delta\Delta$ AEB , ADC فيهما :

$AD = AE$ ... معطى

$AB = AC$ ... معطى

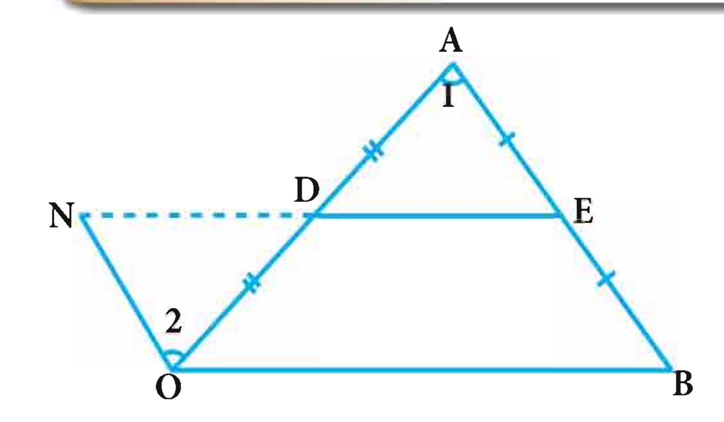
الزاوية A مشتركة بينهما

$\therefore$ يتطابق $\Delta\Delta$ بضلعين والزاوية المحددة بهما .

( و.هـ.م )

## مبرهنة / 1

**قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعي مثلث توازي ضلعه الثالث وطولها نصف طوله.**




المعطيات /

$DO = AD\,,\ EB = AE\,,\ \Delta ABO$

م.ث /

1) $\overline{OB} \parallel \overline{DE}$ ,  2) $DE = \frac{1}{2} OB$

العمل والبرهان /

من نقطة O نرسم مستقيماً يوازي $\overline{BE}$ فيلاقي امتداد $\overline{ED}$ في N فيكون $\overline{ON}$ .

$\Delta ADE \cong \Delta ODN$ بزاويتين وضلع مناظر AAS

حيث : 1) $AD = OD$ . معطى

2) $m\angle ADE = m\angle ODN$ . . . متقابلة بالرأس.

3) $m\angle 1 = m\angle 2$ ... متبادلة لان $\overline{BA} \parallel \overline{ON}$.

من التطابق : DN=DE , تتساوى الاجزاء المتناظرة في الاشكال المتطابقة

$AE = ON$ ... (1)

$AE = EB$ ... (2) معطى

من (1) ، (2) نحصل على : $BE = ON$

∴ الشكل EBON متوازي أضلاع لان $\overline{BE} \parallel \overline{ON}$ بالعمل

∴ $\overline{EN} \parallel \overline{BO}$ ، $EN = BO$ ... خواص متوازي الاضلاع

$DE = DN$ بالبرهان

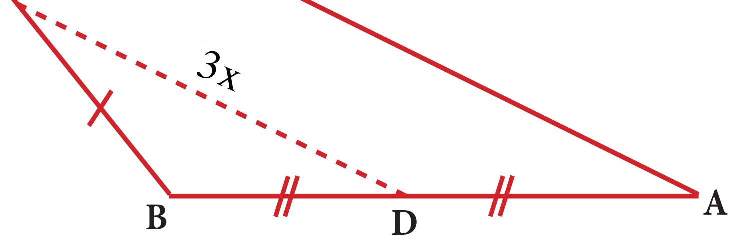
∴ $DE = \frac{1}{2} EN$

∴ $\overline{DE} \parallel \overline{OB}$ , $DE = \frac{1}{2} OB$

## مثال ( 1 )



في الشكل المجاور : جد قيمه x




**الحل/**

D منتصف $\overline{AB}$

E منتصف $\overline{BC}$

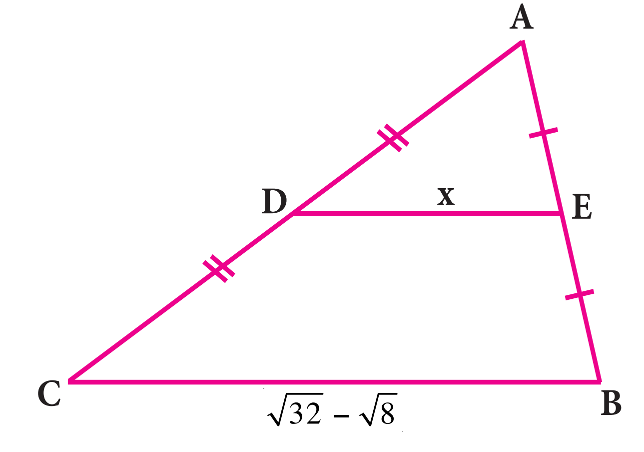
1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

2) $\therefore DE = \frac{1}{2} AC$ (مبرهنة ( 1 ))

$\therefore 3x = \frac{1}{2}(5x+4)$

بضرب الطرفين في 2 : $6x = 5x + 4$

$\therefore x = 4$




**تمرين للطالب**

في الشكل جد x

## مثال ( 2 )

في الشكل المجاور:

1) هل ان : $m\angle 1 = m\angle 2$ ؟

2) جد DE ، (3) ما مساحة المثلث ABC

**الحل/** D منتصف $\overline{AB}$

E منتصف $\overline{AC}$

$$\left\{ \begin{array}{l} DE = \frac{1}{2} BC \\ \overline{DE} \parallel \overline{BC} \end{array} \right.$$ مبرهنة ( 1 )

1) $m\angle 1 = m\angle 2$ متناظرة

لان $\overline{DE} // \overline{BC}$

2) نطبق مبرهنة فيثاغورس على $\triangle$ القائم ABC.

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$(2x)^2 + x^2 = \left(\sqrt{125}\right)^2$$

$$5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25$$

$\therefore x = 5 \Rightarrow BC = 5$ وحدة طول

$\therefore DE = \frac{1}{2} BC = \frac{5}{2} \Rightarrow DE = \frac{1}{2}(5) = \frac{5}{2}$ وحدة طول .... (مبرهنة 1)

3) مساحة المثلث

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times BC \times AB$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 10$

$= 25$ وحدة مساحة

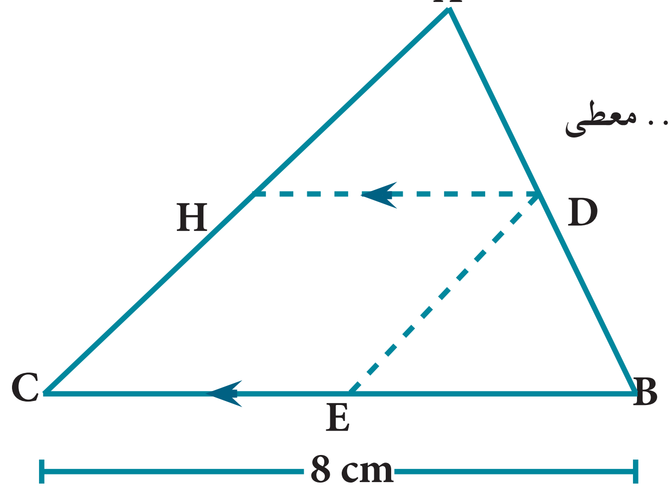
## مثال (3)

في الشكل المجاور: $\Delta$ ABC فيه:

D , E , H منتصفات الاضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ على الترتيب، $BC = 8cm$ جد.

(1) DH.

(2) أثبت ان DECH متوازي اضلاع.




**الحل/** D , E , H منتصفات أضلاع المثلث .... معطى

$\therefore DH = \frac{1}{2} BC$ ، $\overline{DH} // \overline{BC}$ مبرهنة 1

$\therefore DH = \frac{1}{2} \times 8$

$\therefore DH = 4\ cm$

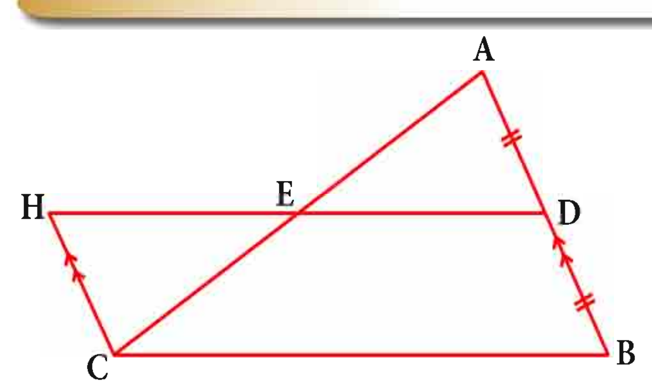
$\therefore DH = EC = 4\ cm$

$\overline{DH} // \overline{EC}$ $\therefore$ الشكل: DECH متوازي اضلاع

«يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع اذا كان فيه ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين»

## مبرهنة / 2

**المستقيم المار بمنتصف أحد أضلاع مثلث موازياً لضلع ثانٍ فيه ينصف الضلع الثالث .**




**المعطيات /**

$\Delta ABC$ فيه : D منتصف $\overline{AB}$ , $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

**المطلوب أثباته /**

$AE = EC$

**العمل والبرهان /**

نرسم من نقطة C مستقيماً يوازي $\overline{BD}$ فيلاقي أمتداد $\overline{DE}$ في نقطة H

∴ الشكل DBCH: متوازي اضلاع

« تعريف متوازي الأضلاع »

∴ $CH = BD$ ......(1) خواص متوازي الاضلاع

$DA = BD$ ......(2) معطى

من 1و2 نجد ان $CH = DA$

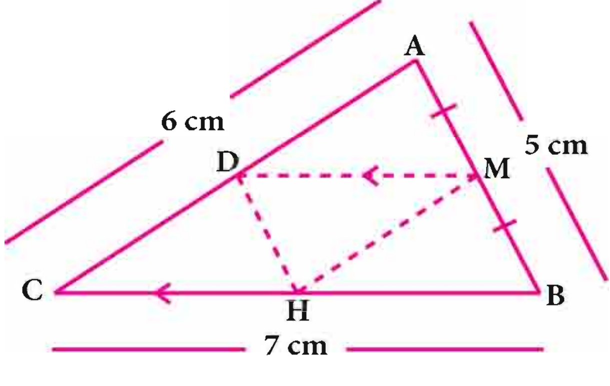
∴ المثلثان ADE , CHE متطابقان (زاويتان وضلع مناظر)

من التطابق : $AE = EC$ ...اجزاء متناظره في اشكال متطابقة **(و.هـ.م)**

### مثال

في الشكل : $\Delta ABC$ فيه $AB = 5\text{ cm}$ , $BC = 7\text{ cm}$ , $AC = 6\text{ cm}$ .

M منتصف $\overline{AB}$, $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$ , $\overline{MH} \parallel \overline{AC}$ أثبت ان $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$ وما محيط $\Delta MHD$ .




البرهان /

M منتصف $\overline{AB}$ , $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$ معطى

∴ $AD = DC$ مبرهنة 2 ... (1)

∵ $\overline{AC} \parallel \overline{MH}$ ...معطى

$\therefore BH = CH$ ... مبرهنة (2)

من (1) و (2) نحصل على :

$\overline{AB} \parallel \overline{DH}$ , $DH = \frac{1}{2} AB$ ...مبرهنة (1)

محيط المثلث يساوي مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة

$\therefore$ محيط المثلث $= MH + HD + DM$

$$= (\frac{1}{2} \times 6) + (\frac{1}{2} \times 5) + (\frac{1}{2} \times 7)$$

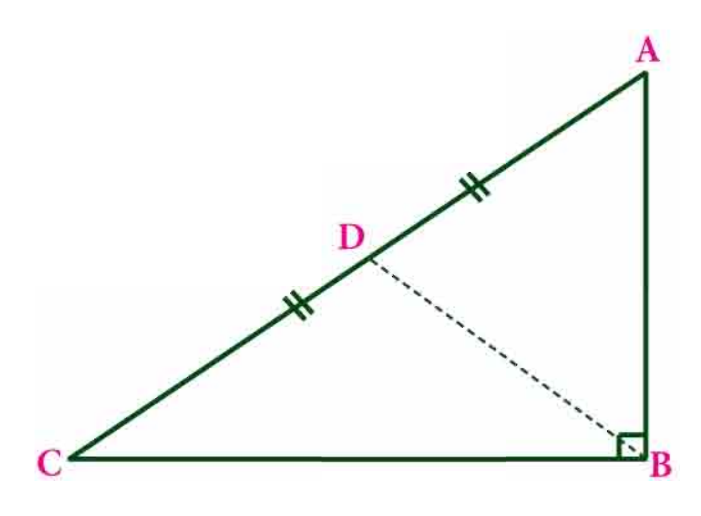
$$\frac{6}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$$

## مبرهنة / 3

طول القطعة المستقيمة المرسومة من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر .

سنقبل هذه المبرهنة بدون برهان

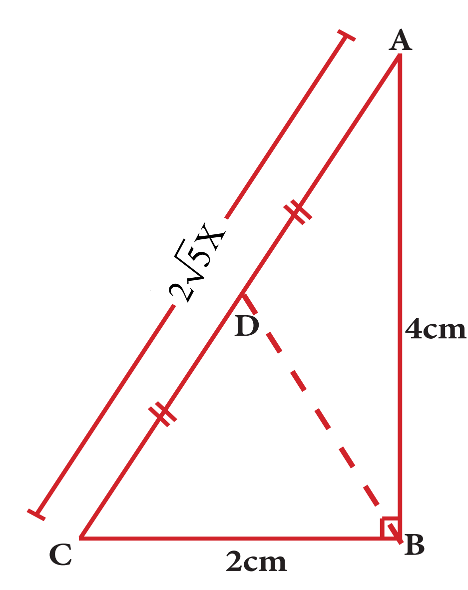
في الشكل المجاور $ABC$ مثلث قائم الزاوية في $B$ , $D$ نقطة منتصف الوتر $\overline{AC}$ عند توفر هذه المعطيات نحصل على : $BD = AD = DC$



## مثال ( 1 )

في الشكل المجاور : $\Delta\ ABC$ فيه D منتصف $\overline{AC}$ .

جد $\overline{BD}$




**الحل/** لإيجاد قيمة x

نطبق مبرهنة فيثاغورس $(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$

$$(2\sqrt{5}x)^2=4^2+2^2$$

$$20x^2=20$$

$$\Rightarrow x^2=1$$

$$\Rightarrow x=1\ (x>0)$$

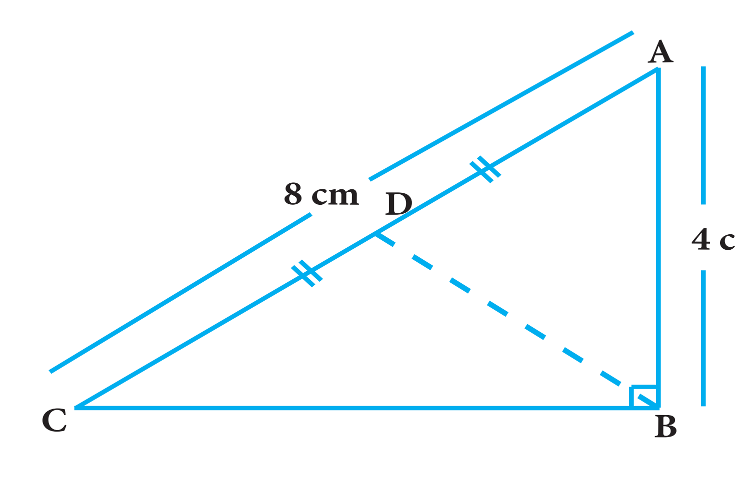
$$BD=\frac{1}{2}AC$$

$$BD=\frac{1}{2}\ .\ 2\sqrt{5}=\sqrt{5}\ cm$$

## مثال ( 2 )

$\Delta ABC$ قائم الزاوية في B، D منتصف $\overline{AC}$ أثبت ان ADB مثلث متساوي الأضلاع، ثم جد $m\angle C$

**الحل/**




$\because$ D منتصف $\overline{AC}$ ، $AC=8$

$\therefore BD=\frac{1}{2}AC$ مبرهنة 3

$\therefore BD=4\ cm$

$\therefore \Delta\ ADB$ منتظم (متساوي الاضلاع)

قياس كل زاويه من زوايا المثلث ADB تساوي $60^\circ$

$\therefore m\angle C=180^\circ-(m\angle B+m\angle A)$ مجموع زوايا مثلث

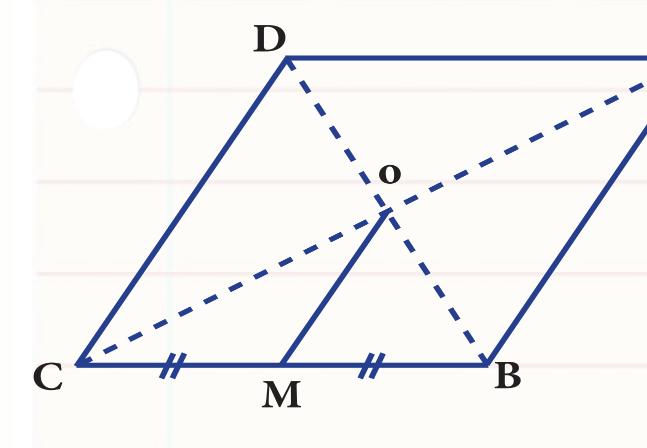
$$=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)$$

$$=180^\circ-150^\circ$$

$$\therefore m\angle C=30^\circ$$




س1/ ABCD معين ، M نقطة منتصف $\overline{BC}$ أثبت ان :

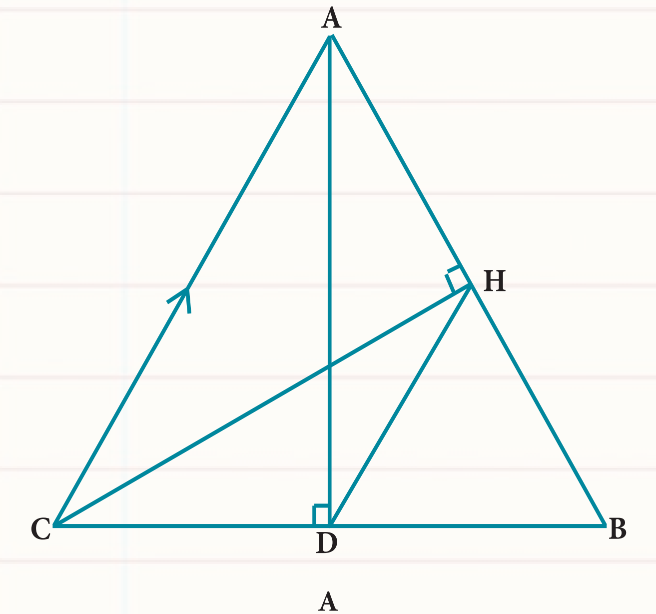



$$OM = \frac{1}{2} AB, \overline{OM} // \overline{AB}$$

س2/ Δ ABC متساوي الاضلاع فيه :

$\overline{AB} \perp \overline{CH}$ , $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

أثبت ان : $\overline{DH} // \overline{AC}$




س3/ في الشكل المجاور :

ABC مثلث فيه AB = AC (متساوي الساقين)

فيه : BC=12 cm , AD=8 cm

M نقطة منتصف $\overline{AB}$ جد MD

س4/ ABC مثلث متساوي الساقين فيه :

$AB = AC$ , M منتصف $\overline{AB}$ , D منتصف $\overline{BC}$

, N منتصف $\overline{AC}$ أثبت ان : AMDN معين

س5/ ABC مثلث ، فرضت النقطتان M ، N على $\overline{AB}$ بحيث ان $AM=MN=NB$

ونصفت $\overline{BC}$ في النقطه D وتقاطعت $\overline{CM}$ , $\overline{AD}$ في O أثبت ان :

1) $\overline{CM} // \overline{DN}$

2) O منتصف $\overline{AD}$

3) $MO=\frac{1}{4}MC$

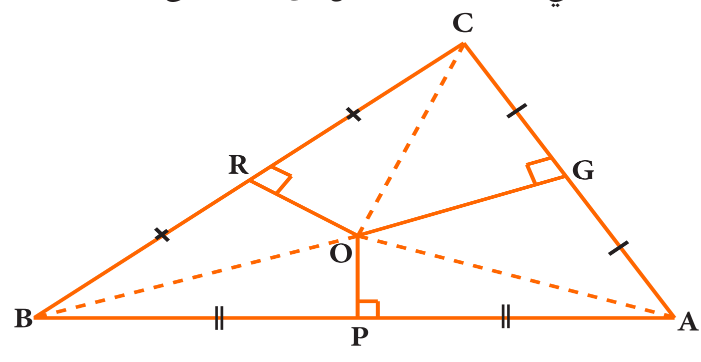
س6/ ABCD متوازي أضلاع ، تقاطع قطراه في O ، نصفت $\overline{BC}$ في P ، نصفت $\overline{CD}$ في N

أثبت أن : OPCN متوازي أضلاع.

## مبرهنة / 4

**الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها تتلاقى في نقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن رؤوس المثلث .**

ABC مثلث فيه G منتصف $\overline{AC}$ ، R منتصف $\overline{BC}$، P منتصف $\overline{AB}$ أقيمت أعمدة على أضلاع المثلث من R , P , G فالتقت في نقطه O . نحصل من ذلك على ان : $OB = OA = OC$




## مثال

في الشكل : E منتصف $\overline{BC}$ , D منتصف $\overline{AB}$ , R منتصف $\overline{AC}$, $\overline{OD} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE} \perp \overline{BC}$ , OB=5 cm , AC=8 cm جد OA , OR .

**الحل/** $\because$ $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ , $\overline{OE} \perp \overline{BC}$ حيث E , D منتصف الضلعين $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$

$\therefore$ 0 نقطه ملتقى الاعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها .

OC=OB=OA ...... مبرهنة 4

OA=5 cm

$\because$ R منتصف $\overline{AC}$

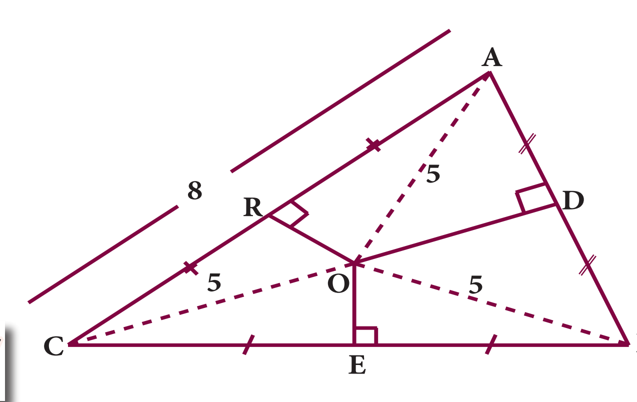
$\therefore$ $\overline{AC} \perp \overline{OR}$ ... قطعة المستقيم الواصل بين راس مثلث متساوي الساقين ومنتصف القاعدة تكون عمودية على القاعدة .

$\therefore$ ORA قائم الزاوية في R , AR=4 cm

فيثاغورس $(AO)^2 = (AR)^2 + (RO)^2$

$25 = 16 + (RO)^2$

$\therefore$ RO = 3 cm



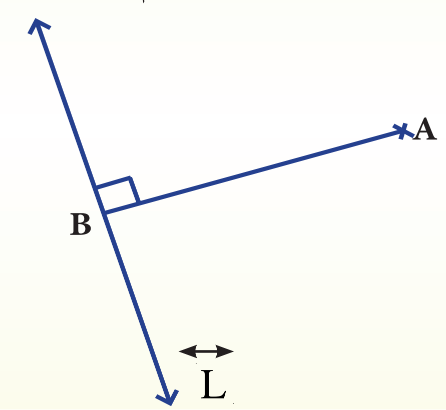
# 5 – 2 منصفات زوايا المثلث

## تعريف (5-1) بُعد نقطه عن المستقيم

هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة الى المستقيم .

$\overleftrightarrow{L} \not\ni A$ , $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{L}$

AB بُعد النقطة A عن $\overleftrightarrow{L}$




## مبرهنة / 5

**منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن أضلاعه .**

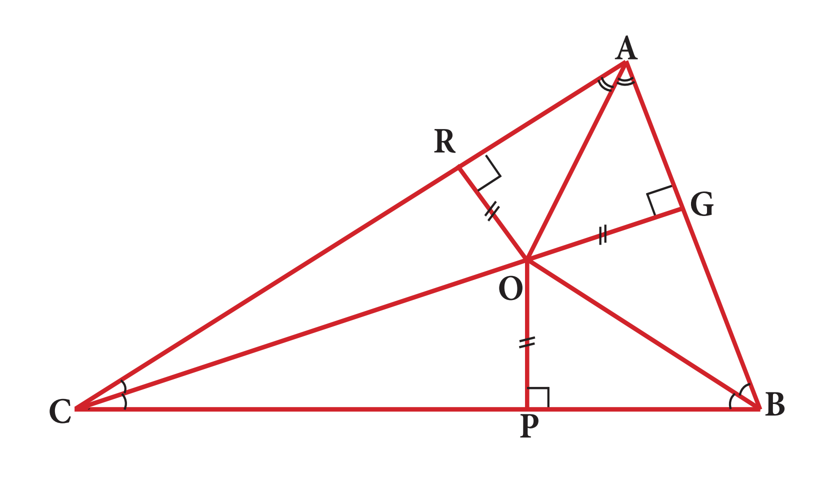
في الشكل : ABC مثلث فيه : $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OC}$

منصفات الزوايا A ، B ، C

من هذه المعطيات نحصل على ان : OG=OP=OR

حيث $\overline{OG}$ ، $\overline{OP}$ ، $\overline{OR}$ أعمدة مرسومة من نقطه **O**

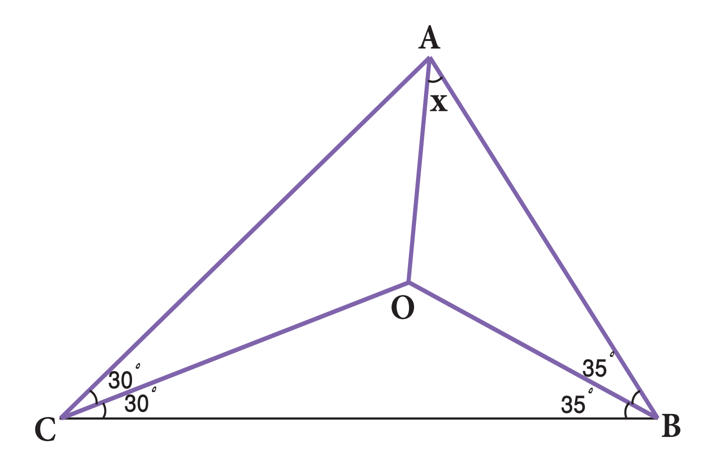
على $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{AC}$





## مثال ( 1 )

في الشكل : جد قيمه x




### الحل /

$\overline{BO}$ تنصف زاوية B

$\overline{CO}$ تنصف زاوية C

∴ O نقطة التقاء منصفات

زوايا المثلث ABC .

$x=\frac{1}{2} m \angle A$ ( $\overline{AO}$ تنصف زاوية A )

$m \angle A=180^\circ-(m\angle B+m\angle C)$ مجموع زوايا مثلث

$=180^\circ-(70^\circ+60^\circ)$

$=180^\circ-130^\circ$

$m\angle A=50$

$x=25^\circ$

## مبرهنة / 6

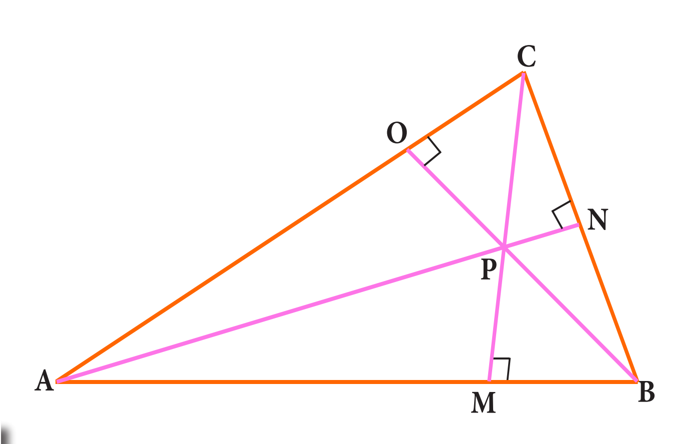
أرتفاعات المثلث تلتقي بنقطة واحدة .

سنقبل هذه المبرهنة بدون برهان .

في الشكل المجاور:

الارتفاعات الثلاثة $\overline{BO}$ , $\overline{CM}$ , $\overline{AN}$

للمثلث التقت في نقطة P



## مثال ( 2 )

ABC مثلث فيه : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ، $m\angle AOR=60^\circ$ جد قياس كل من الزوايا $OAR$, $ARB$

**الحل /**

$\overline{AD} \cap \overline{CE} = O$

O نقطة التقاء أرتفاعات المثلث ABC ..(مبرهنة 6)

$\overline{BR}$ أرتفاعاً له كذلك .

$m\angle ARB=90^\circ$ ... تعريف الارتفاع

في Δ القائم ARO في R

$\therefore m\angle RAO=90^\circ - m\angle ROA$

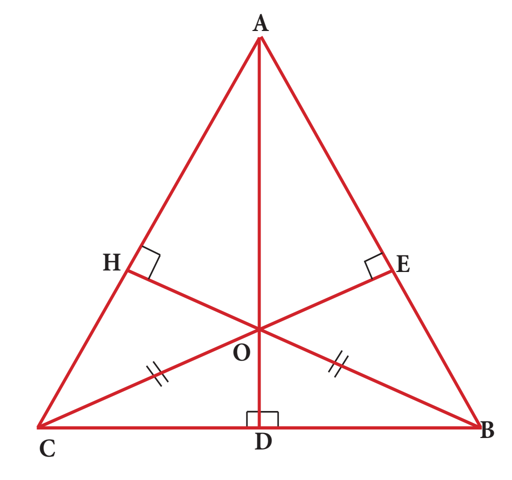
$m\angle RAO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

## مثال ( 3 )

في الشكل : Δ ABC فيه : $\overline{AD}, \overline{BH}, \overline{CE}$ أرتفاعات للمثلث ABC .

حيث $OB = OC$ أثبت ان : $AB = AC$


البرهان :




$\overline{BH} \cap \overline{CE} = O$

$\therefore O$ ملتقي ارتفاعات المثلث

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ...... أذكر السبب

في Δ OBC

نقطة D منتصف $\overline{BC}$ .... خواص المثلث متساوي الساقين

$AB=AC$ (لماذا ؟)

# 5 – 3 القطع المتوسطة للمثلث

## تعريف (2ـ5) القطعة المتوسطة

هي القطعة المستقيمة التي طرفاها هما رأس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس .

ملاحظة : لكل مثلث ثلاث قطع مستقيمة متوسطة .

## مبرهنة / 7

القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس .

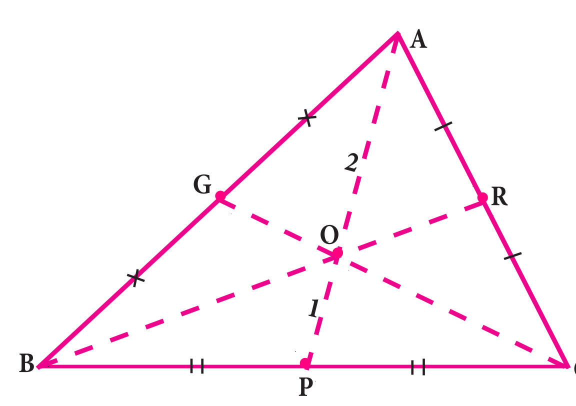
في المثلث ABC : $\overline{BR}, \overline{CG}, \overline{AP}$ قطع متوسطة تلتقي في O.

$$\frac{CO}{OG}=\frac{BO}{OR}=\frac{AO}{OP}=\frac{2}{1}$$

$$OR=\frac{1}{2}\ BO$$

$$OR=\frac{1}{3}\ BR$$

$$OB=\frac{2}{3}\ BR$$




## مثال ( 4 )

في الشكل المجاور : المثلث ABC فيه $\overline{CE}$ ، $\overline{AD}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O ،

CE = 9 cm ، AD=6 cm جد OE , AO .

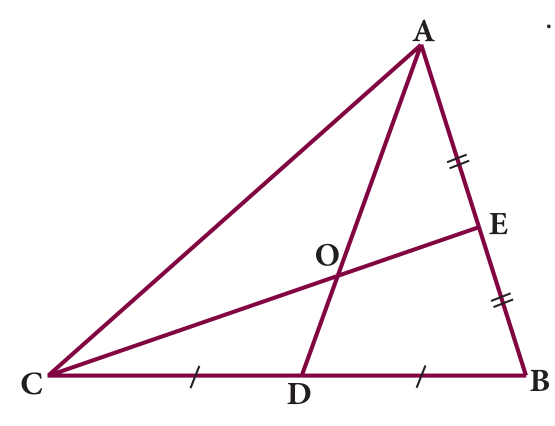
**الحل /** O ملتقي متوسطات المثلث ABC

$$\therefore OE=\frac{1}{2}OC$$

$$OE=\frac{1}{3}CE$$

$$\therefore OE=\frac{1}{3}\ .\ 9=3\ cm$$

كذلك $\overline{AD}$ قطعة متوسطة $\therefore OA=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\times 6=4\ cm$

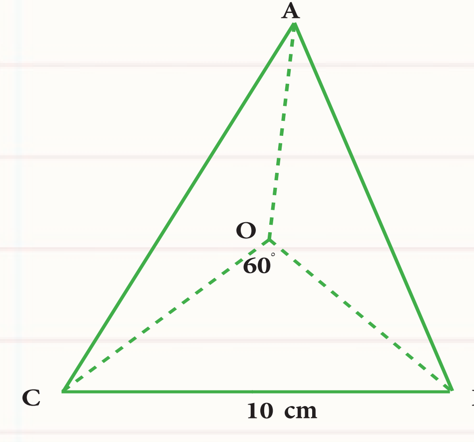





س1/ في الشكل : O نقطة التقاء الاعمدة المقامة على أضلاع المثلث ABC من منتصفاتها



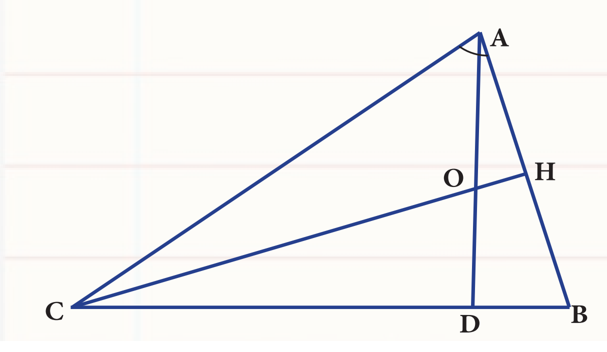
$m\angle COB = 60^{\circ}$ ، $BC = 10\ cm$ جد OA.




س2/ $\Delta$ ABC نصفت الزاويتان B , C فألتقى المنصفان في نقطة O ، ثم رسم مستقيم يمر من O ويوازي $\overline{AC}$ ويقطع $\overline{AB}$ في H ويقطع $\overline{BC}$ في M أثبت ان $AH = HO$ .

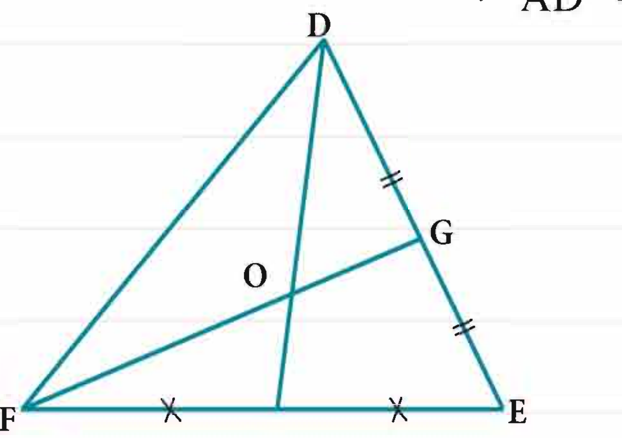
س3/ ABCD شبه منحرف فيه : $\overline{AD} // \overline{BC}$ ، $AB=AD=DC$ , $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$ ، $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} = \{H\}$ برهن ان : $\overrightarrow{HO}$ ينصف الزاوية BHC

س4/ في الشكل : المثلث ABC فيه : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ , O نقطة التقاء أرتفاعات المثلث ABC ، $m\angle BAC=70^{\circ}$ جد : $m\angle ACH$ ، $m\angle CHA$ .



س5/ المثلث ABC , O نقطة التقاء القطع المتوسطة ، $m\angle COB=90^\circ$ ، $\overrightarrow{AO} \cap \overline{BC}=\{D\}$

، $BC=6$ cm جد AD .



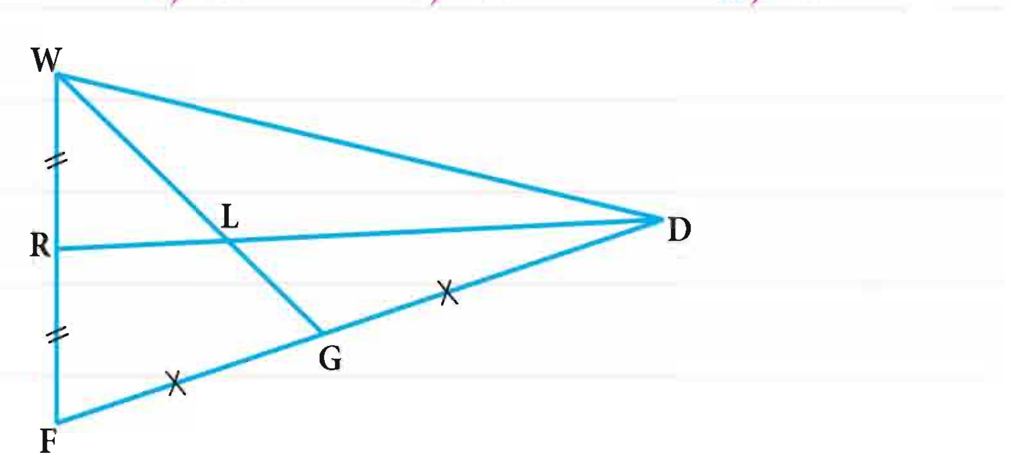

س6/ في الشكل أعلاه : O نقطة التقاء القطع المتوسطة في Δ DEF . فاذا كان :

$GF=6x^2+9y$ فأى من المقادير التاليه يمثله OF ؟

a) $2x^2+9y$ b) $2x^2+3y$ c) $6x^2+9y$ d) $4x^2+6y$

س7/ في الشكل : اذا كان : $WL=15x$ ، $LG=5x+3$ أختر الاجابة الصحيحة لقيمة x ؟

a) 0.3 b) 0.4 c) 0.6 d) 1.2



# 6 الفصل السادس

# الدائرة

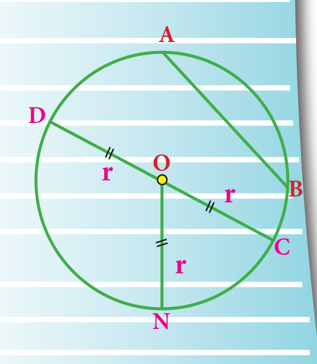
# Circle

[6–1] الدائرة .

[6–2] كيفية تعيين (رسم ) الدائرة .

[6–3] الاقواس .

[6 – 4] التماس .




| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
|---|---|
| نصف القطر | r |
| النسبة الثابتة | $\pi$ |
| القوس AB | $\overset{\frown}{AB}$ |

الفصل 6

# 6 – 1 Circle (الدائرة)

## الدائرة

عرف الانسان الدائرة منذ زمن قديم حيث درس خواصها واستخدمها في مجالات عديدة في حياته ورسمها بأبسط الوسائل المتاحة .

وسوف ندرس في هذه المرحلة الدائرة من زاوية أخرى .

### [1 – 1 – 6] تعاريف

**تعريف [1 – 6] الدائرة**

مجموعة نقاط المستوي والتي تبعد كل منها ببعد ثابت ومتساوٍ عن نقطة ثابتة تسمى (المركز O = Center) .

(يسمى البعد الثابت طول نصف القطر r = Radius).

**تعريف [2 – 6] نصف قطر**

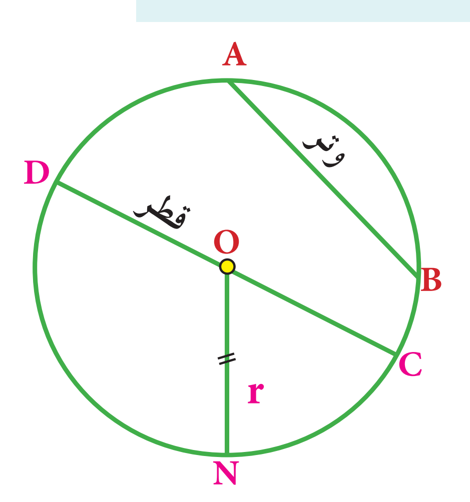
قطعة المستقيم الواصلة بين مركز الدائرة واية نقطة من نقاطها .

**تعريف [3 – 6] وتر الدائرة**

قطعة المستقيم الواصله بين أية نقطتين من نقاط الدائرة .

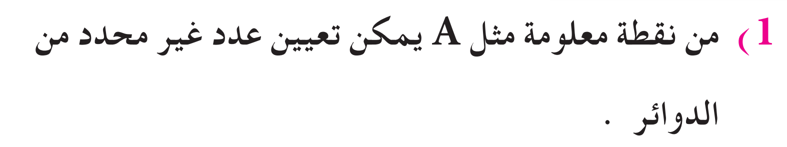
**تعريف [4 – 6] قطر الدائرة**

وتر الدائرة المار بمركزها .





# كيفية تعيين (رسم) الدائرة



1) من نقطة معلومة مثل **A** يمكن تعيين عدد غير محدد من الدوائر .

2) من نقطتين معلومتين مثل **A , B** لا يمكن تعيين دائرة واحدة (هناك مجموعة غير محددة من الدوائر تحتوي **A , B** ) ويكون مركز هذه المجموعة أية نقطة تقع على العمود المنصف للقطعة **AB** .

3) **a** – من ثلاث نقاط على أستقامة واحدة لا تتعين أية دائرة .

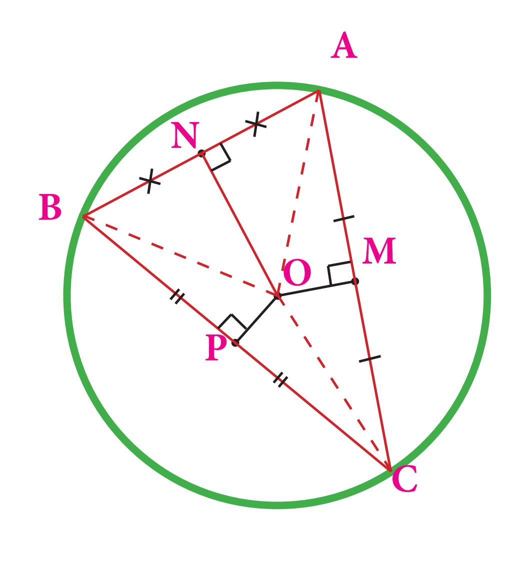
**b** – من ثلاث نقاط ليست على أستقامة واحدة تتعين (يمكن رسم) دائرة واحدة فقط كما تنص المبرهنة الآتية:

## مبرهنة / 8

**كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة .**

سوف نقبل المبرهنة بدون برهان

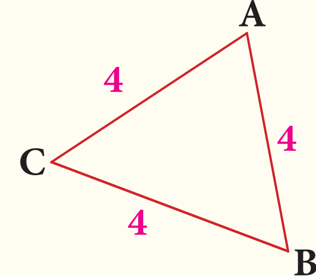
توضيح / في الشكل المجاور:




**A , B , C** ثلاث نقاط ليست على أستقامة واحدة (اي أنها تشكل رؤوس المثلث **ABC** ) .

والنقط **M , N , P** هي منتصفات أضلاعه $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب حيث ألتقت الاعمدة المقامة على هذه الاضلاع من المنتصفات **M , N , P** في نقطة (**O**) فتكون هذه النقطة (**O**) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث **A , B , C** ومتساوية البعد عنها ( $OA = OB = OC = r$ ) . كما مر سابقاً .

**تدريب :** أرسم دائرة تمر برؤوس مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ( 4cm ) .




**ملاحظة** يمكن فهم مبرهنة 8 بأسلوب آخر كما يلي :

ان الاعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تلتقي بنقطة واحدة ( O ) تكون متساوية البعد عن رؤوسه . وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

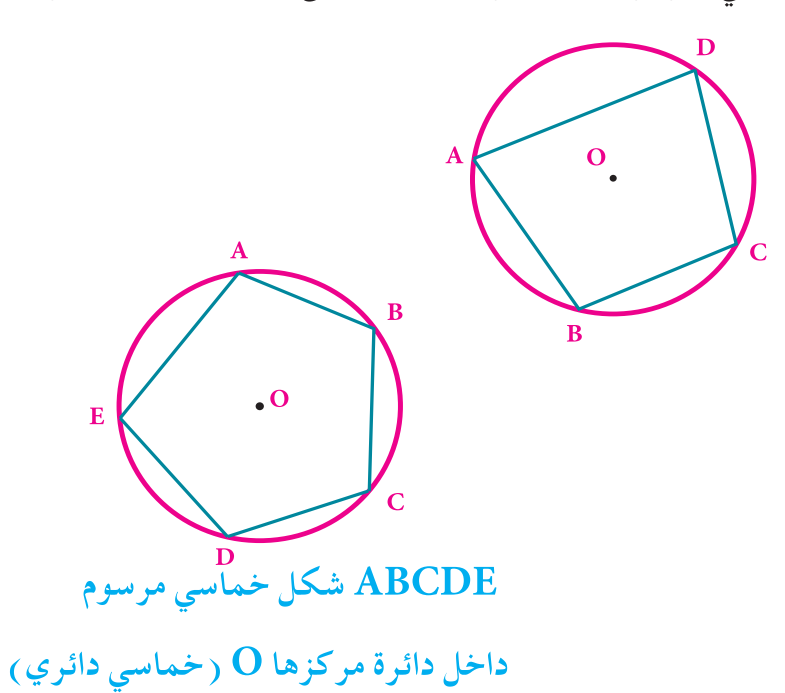
## تعريف / [ 6-5 ] الدائرة المرسومة خارج الاشكال الهندسية

يسمى الشكل الرباعي ( شكلاً رباعياً دائرياً ) أذا كانت رؤوسه تنتمي لدائرة واحدة .

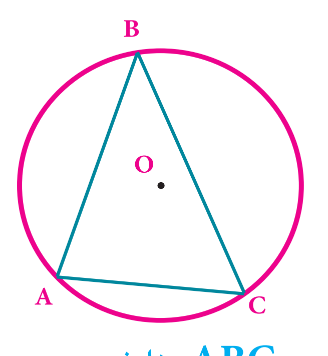
في الشكل المجاور:

ABCD شكل رباعي دائري حيث A , B , C , D تنتمي للدائرة التي مركزها O .

وكذلك الاشكال الهندسية الاخرى التي تمر برؤوسها دائرة واحدة تسمى اشكال هندسية دائرية .




ABCDE شكل خماسي مرسوم داخل دائرة مركزها O ( خماسي دائري )




ABC مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها 0

# 6 – 3 قوس الدائرة–الزوايا المركزية–الزوايا المحيطية

## قوس الدائرة :

هو جزء من الدائرة. في الشكل المجاور نلاحظ ان $\overline{AB}$

يشترك مع الدائرة بالنقطتين $A , B$ .

اي ان (الدائرة) $\cap \overline{AB} = \{A , B\}$ وبذلك انقسمت

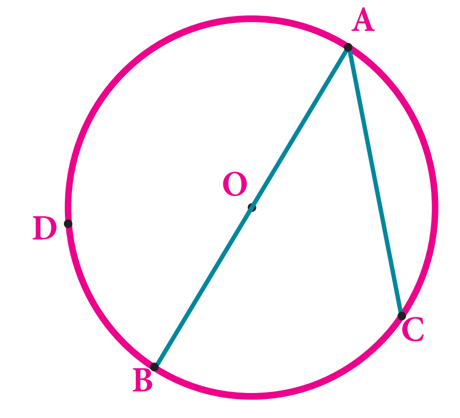
مجموعة نقاط الدائرة الى جزئين كل منهما يسمى قوساً.

– القوس الاصغر (القوس الثانوي $\overset{\frown}{AB}$ Minor Arc ) .

– القوس الاكبر ( القوس الرئيسي) $\overset{\frown}{ACB}$ Major Arc ) .

مع ملاحظة ان اي قطر في الدائرة يقسمها الى قوسين متساويين

يسمى كل منها نصف الدائرة Semi circle.




اي ان : القوس الاصغر أصغر من نصف الدائرة

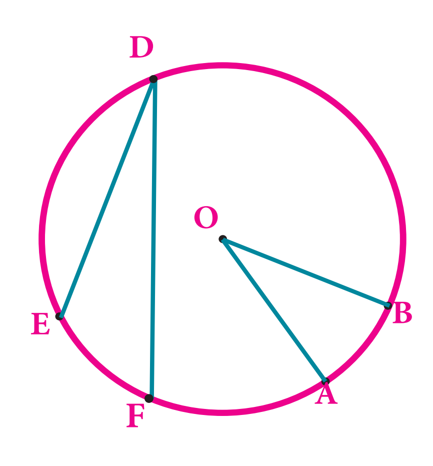
اما : القوس الاكبر فهو اكبر من نصف الدائرة.

وقد اتفق على التعبير عن القوس الاصغر بحرفين فقط

كما في القوس $\overset{\frown}{AC}$ .

**توضيح :**

**في الشكل المجاور :**




تسمى الزاوية AOB زاوية مركزية في الدائرة التي مركزها O.

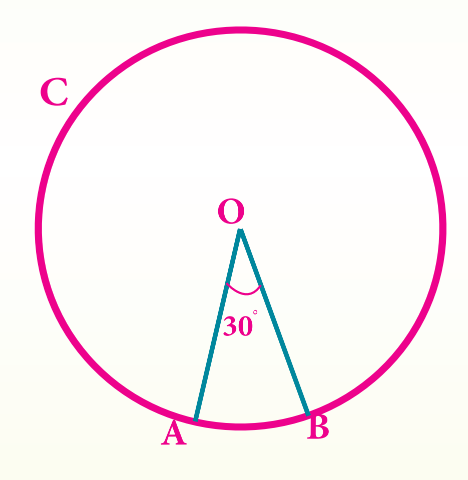
اي ان رأس الزاوية هو مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.

تسمى الزاوية EDF زاوية محيطية ، رأسها نقطة من نقط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة.

## تعريف [6 – 6]

قياس قوس في دائرة هو قياس زاويته المركزية اي الزاوية التي يتحدد هذا القوس بضلعيها .

كما في الشكل المجاور .




$m(\overset{\frown}{AB}) = m\angle AOB$

ووحدة قياس القوس تسمى درجة قوسية

فإذا كان : $m\angle AOB = 30^0$

فأن قياس قوسها AB يكون 30 درجة قوسية

وأن قياس القوس الاكبر ACB هو 30–360

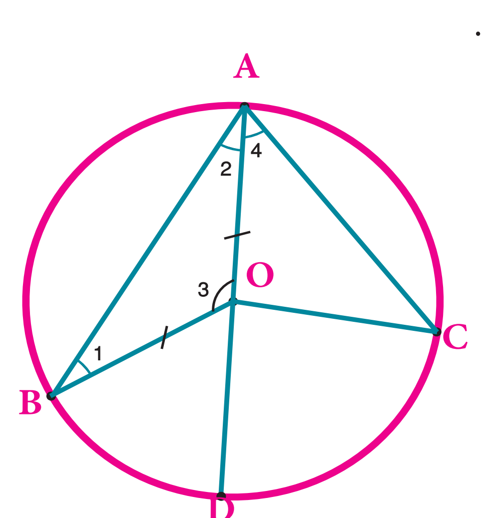
أي 330 درجة قوسية .

## مبرهنة / 9

قياس الزاوية المركزية في دائرة يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس نفسه .

**المعطيات /**

دائرة مركزها O , COB زاوية مركزية ، CAB زاوية محيطية .




**المطلوب أثباته /**

$m\angle COB = 2m\angle CAB$

**العمل والبرهان /**

نرسم $\overline{AD}$ قطراً للدائرة.

أنصاف أقطار دائرة ... $OA = OB$

زاويتا قاعدة مثلث متساوي الساقين $m\angle 1 = m\angle 2$

(مجموع زوايا مثلث) $m\angle 3 + m\angle 1 + m\angle 2 = 180^0$

بالتعويض عن $m\angle 1 \Leftarrow m\angle 3 + 2m\angle 2 = 180^0$

$m\angle 3 = 180^0 - 2m\angle 2 \ldots\ldots (1)$

زاوية مستقيمة $m\angle BOD + m\angle 3 = 180^0$

$m\angle BOD = 180^0 - m\angle 3$

من $m\angle BOD = 180^0 - (180^0 - 2m\angle 2) \ldots (1)$

$m\angle BOD = 2m\angle 2 \ldots\ldots (2)$

وبنفس الطريقة نثبت ان

$m\angle COD = 2m\angle 4 \ldots\ldots (3)$

بجمع المعادلتين 2 و 3

$m\angle BOD + m\angle COD = 2m\angle 2 + 2m\angle 4$

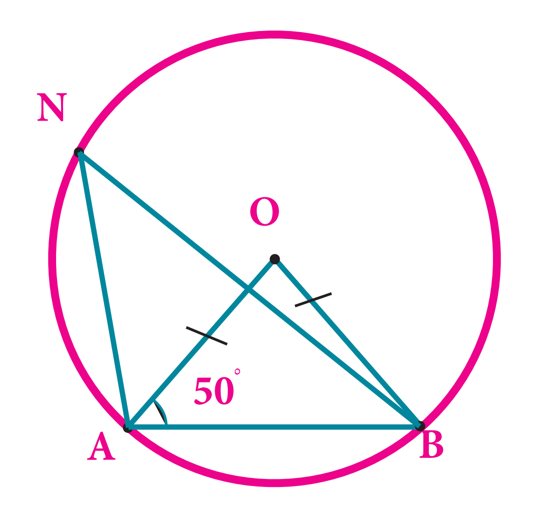
$\therefore m\angle COB = 2m\angle CAB$ (و . هـ . م)

**نتيجة 1 لمبرهنة 9 :**

قياس الزاوية المحيطية في دائرة يساوي نصف قياس قوسها

## مثال (1)

في الشكل المجاور: جد $m\angle N$




**الحل/**

$\because$ انصاف اقطار دائرة $OA = OB$

$\therefore$ زاويتا قاعدة $m\angle ABO = m\angle BAO$

$\because$ مثلث متساوي الساقين $m\angle ABO = 50^0$

$\therefore$ زوايا مثلث $m\angle AOB = 180^0 - 100^0$

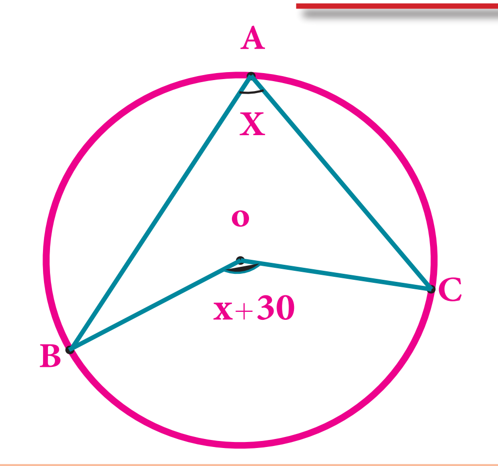
$m\angle AOB = 80^0$

(مبرهنة 9) $m\angle AOB = 2m\angle N \ldots\ldots$

$$m\angle N = \frac{80^0}{2} = 40^0$$

$\therefore m\angle N = 40^\circ$

## مثال ( 2 )



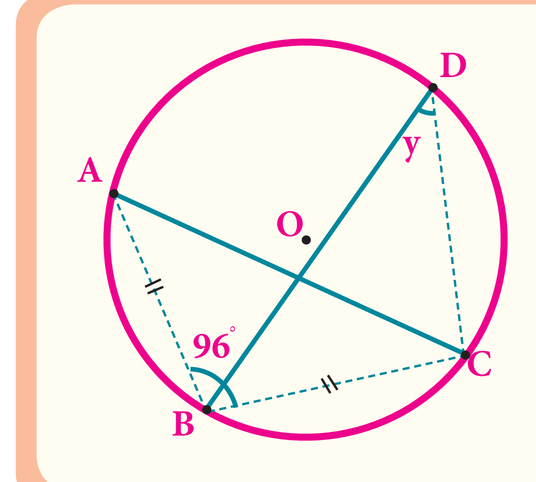

في الشكل المجاور : جد قيمة x :

**الحل /**

$\because$ مبرهنة 9 : $m \angle COB = 2\, m \angle A$

$\therefore\ x + 30^0 = 2x$

$x = 30^0$




**تدريب :** في الشكل المجاور:

$AB = BC$

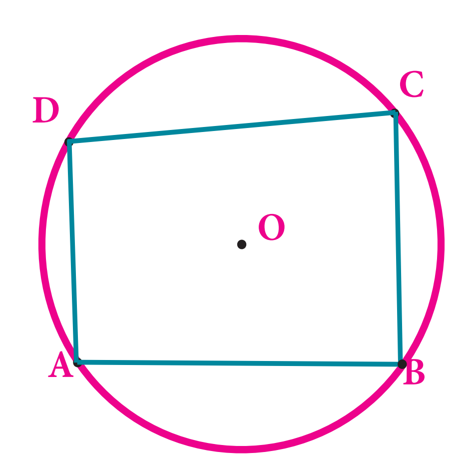
$m \angle ABC = 96^0$

جد قيمة y

### نتيجة 2 لمبرهنة 9 :

مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في أي شكل رباعي دائري $= 180^0$

في الشكل المجاور :



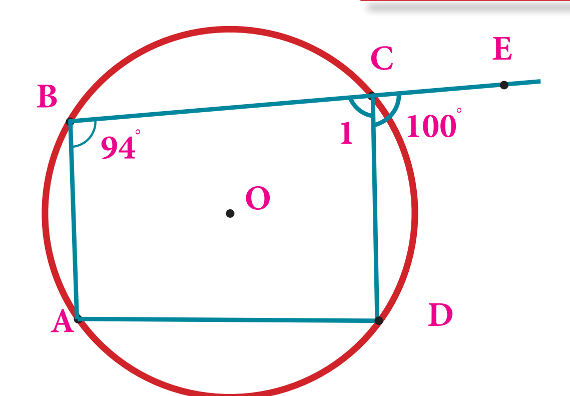

ABCD شكل رباعي دائري (مرسوم داخل دائرة)

$m \angle A + m \angle C = 180^0$

$m \angle B + m \angle D = 180^0$

## مثال (3)

في الشكل :




جد $m\angle A , m\angle D$

**الحل/**

ABCD شكل رباعي دائري

نتيجة 2 مبرهنة 9 ... $m\angle D + m\angle B = 180^0$

$m\angle D = 180^0 - 94^0$

$m\angle D = 86^0$

[متجاورتان على أستقامة واحدة (مستقيمة)] $m\angle 1 + m\angle ECD = 180^0$

$m\angle 1 = 180^0 - 100^0$

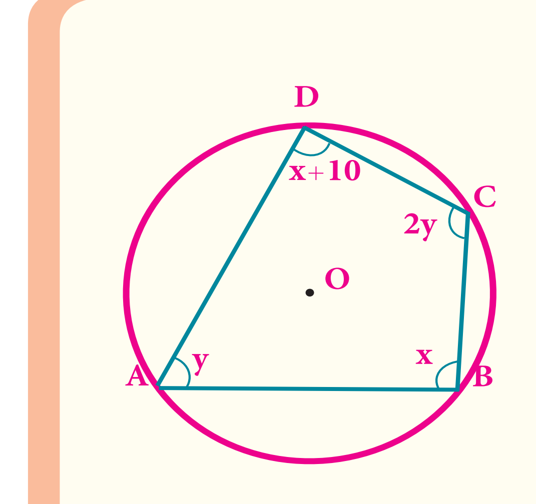
$m\angle 1 = 80^0$

(متقابلتان في شكل رباعي دائري) $m\angle A + m\angle 1 = 180^0$

$m\angle A = 180^0 - 80$

$m\angle A = 100^0$

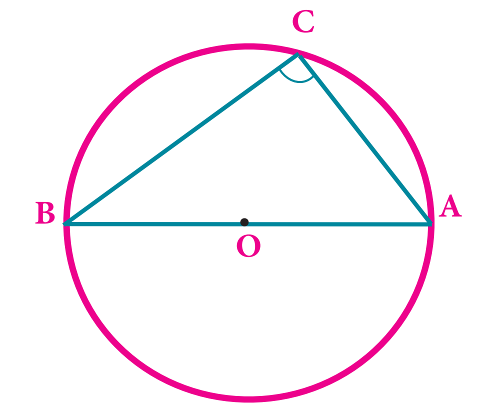
**تدريب :** في الشكل المجاور :




جد قيمة $x$ , $y$ .

## مبرهنة / 10

**قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تساوي $90^0$**




**المعطيات /**

دائرة مركزها $O$ , $\overline{AB}$ قطر فيها .

**المطلوب اثباته /**

$m \angle ACB = 90^0$

**البرهان /**

$AOB$ زاوية مركزية

$m \angle AOB = 180^0$ ........ ( زاوية مستقيمة لان $\overline{AB}$ قطر ) .

$m \angle AOB = 2\, m \angle C$ ....... قياس الزاوية المركزية تساوي ضعف قياس المحيطية المشتركة معها بنفس القوس

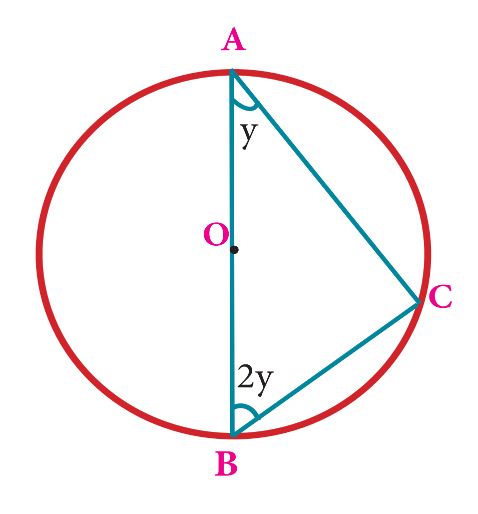
$$m \angle C = \frac{180^0}{2} = 90^0$$

( و . هـ . م )



## مثال ( 4 )

دائرة مركزها $O$ , $\overline{AB}$ قطر فيها ، جد قيمة $Y$ .




**الحل /**

مبرهنة 10 ..... $m \angle C = 90^0$

$m \angle A + m \angle B = 180^0 - m \angle C$ ....زوايا مثلث

$m \angle A + m \angle B = 90^0$

$y + 2y = 90^0$

$3y = 90^0$

$y = 30^0$



## مثال ( 5 )

في الشكل دائرة مركزها O , $\overline{AB}$ قطر فيها ، $AB = BC$ أثبت أن $AD = DC$

**الحل /**

المعطيات /
المطلوب أثباته /
} تترك للطالب

البرهان /

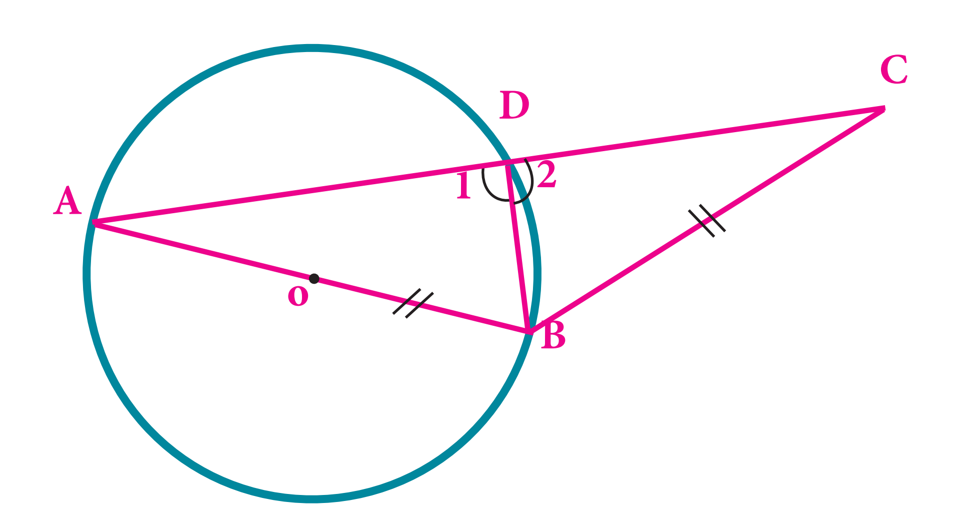
$m\angle 1 = 90^0$ ...... ( مبرهنة 10 )

BCD , ABD ....... ( مثلثان قائما الزاوية في D ) .

$AB = BC$ ............ معطى

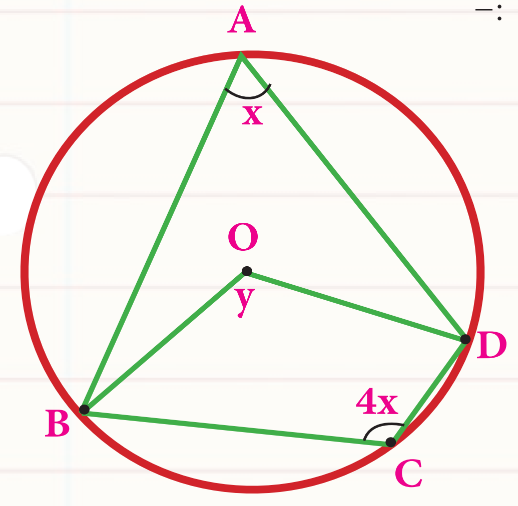
$\Delta CBD , \Delta ABD$ ...... متطابقان (وتر وضلع قائم)

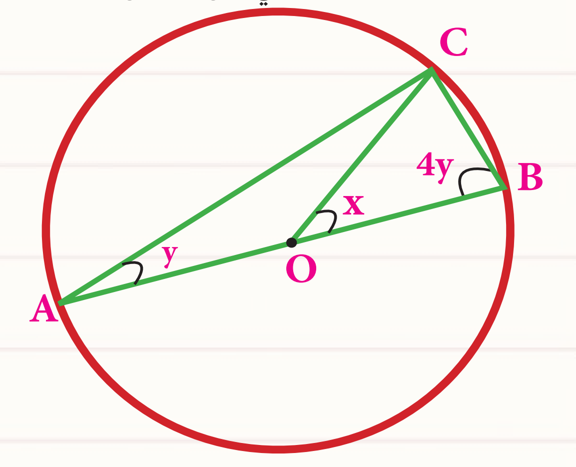
من التطابق نحصل على : $AD = DC$ .... تتساوى الاجزاء المتناظرة في الاشكال المتطابقة





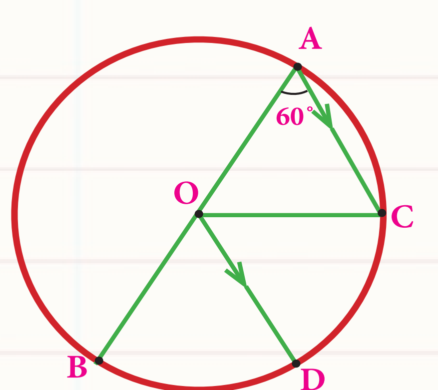

س1 / جد قيمة $X$ , $Y$ في كل شكل من الاشكال الاتية :-




س2 / دائرة مركزها $O$ (الشكل المجاور)، $\overline{AB}$ قطر فيها $m\angle OAC = 60^\circ$ ، $\overline{OD} \parallel \overline{AC}$

جد $m\overset{\frown}{CD}$ ثم أثبت ان : $m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{BD}$




س3 / $ABC$ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها $O$ . فاذا كان $m\angle BAC = 30^0$ أثبت ان المثلث $OBC$ متساوي الاضلاع .

س4 / $\overline{OA}$ , $\overline{OB}$ نصفا قطرين في دائرة مركزها $O$ ، رسم الوتر $\overline{BD}$ يوازي $\overline{AO}$، فاذا كان $m\angle AOB = 60^0$ أثبت ان : $\overline{AD} \perp \overline{OB}$



س5 / في الشكل المجاور

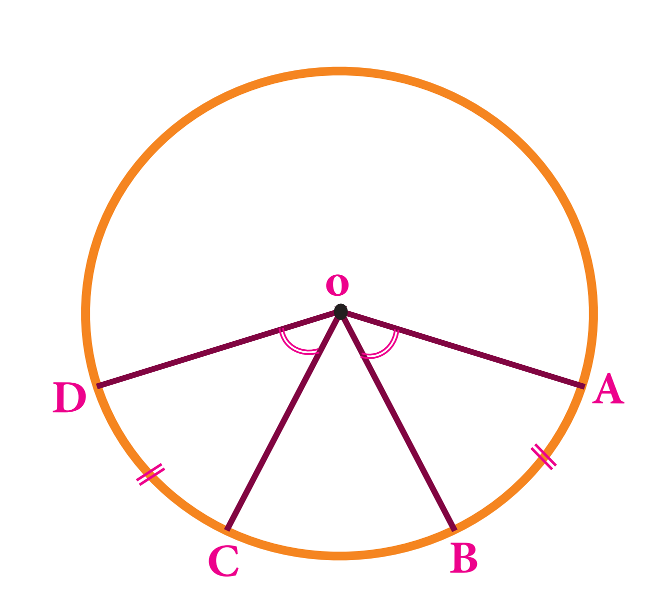
a ) جد $m\angle D$ .

b ) أثبت ان $\overline{AC}$ ينصف زاوية $A$ .

D
C
A
20°
80°
B
o

## مبرهنة / 11

**اذا تطابق قوسان في دائرة فان زاويتيهما المركزيتين متطابقتان**




المعطيات /

$m\,\overset{\frown}{CD} = m\,\overset{\frown}{AB}$

المطلوب أثباته /

$m\angle COD = m\angle AOB$

البرهان /

$m\,\overset{\frown}{AB} = m\angle AOB$ ...... ①

( قياس القوس هو قياس زاويته المركزية )

كذلك :

$m\,\overset{\frown}{CD} = m\angle COD$ ... ②

معطاة $m\,\overset{\frown}{CD} = m\,\overset{\frown}{AB}$ .... ③

من (1) و (2) و (3) نحصل على :

$m\angle AOB = m\angle COD$ (و . هـ . م)

**نتيجة مبرهنة 11 :**

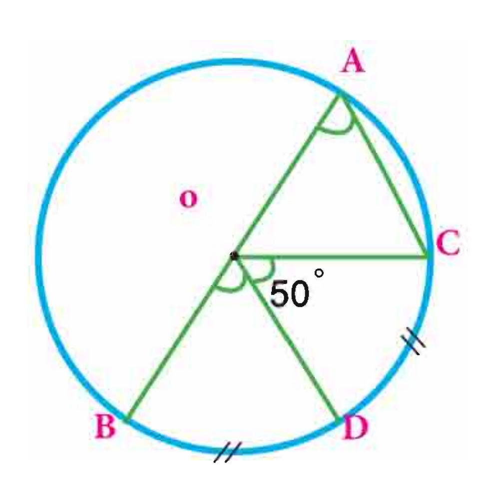
اذا تطابق قوسان في دائرة فان زاويتيهما المحيطيتين متطابقتان .

### مثال (1)

دائرة مركزها O , $\overline{AB}$ قطر فيها $m\angle COD = 50^0$ , $m\,\overset{\frown}{CD} = m\,\overset{\frown}{BD}$ جد $m\angle DOB$ ثم اثبت ان $\overline{AC} \,//\, \overline{OD}$

المعطيات /
المطلوب أثباته /
} تترك للطالب

البرهان /




معطى $m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{BD}$

$m\angle DOB = m\angle COD$..... ( مبرهنة 10 )

$m\angle DOB = 50^0$

$m\angle COB = m\angle COD + m\angle DOB = 100^0$

( قياس المركزية ضعف قياس المحيطية )

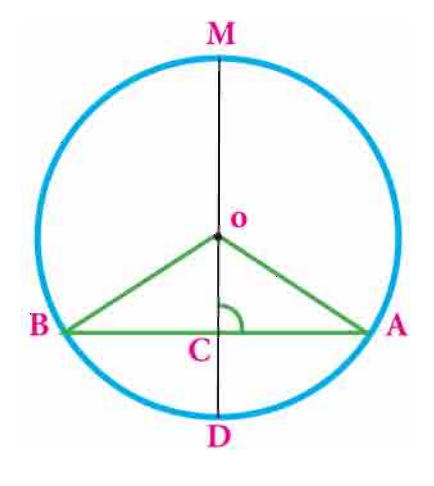
$m\angle CAB = \frac{1}{2}\, m\angle COB$
$= 50^0$

الزاويتان $DOB$ , $CAB$ متناظرتان ومتطابقتان

$\therefore \overline{DO} \,//\, \overline{CA}$

## مبرهنة / 12

القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر وينصف كلاً من قوسيه .




سوف نقبل هذه المبرهنة بدون برهان .

توضيح :

في الشكل المجاور :

$\overline{AB}$ وتر في دائرة مركزها $O$ , $\overline{MD}$ قطر فيها

بحيث ان $\overline{AB} \perp \overline{MD}$

ينتج من ذلك :

1 - $\overline{MD}$ ينصف الوتر $\overline{AB}$ $(AC = BC)$

2 - $m\overset{\frown}{AD} = m\overset{\frown}{BD}$

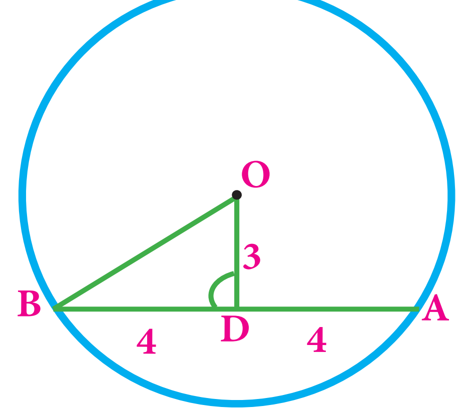
3 - $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$

## مثال (2)



دائرة مركزها $O$ ، $\overline{AB} \perp \overline{OD}$ ، $OD = 3\ cm$ ، $AB = 8\ cm$ جد $BO$

**الحل/**




$\overline{AB} \perp \overline{OD}$ ..... (معطى)

D منتصف $\overline{AB}$ ...... ( مبرهنة 12 )

$BD = 4\ cm$

في المثلث OBD القائم الزاوية في D

$(OB)^2 = (OD)^2 + (BD)^2$ .. ( مبرهنة فيثاغورس )

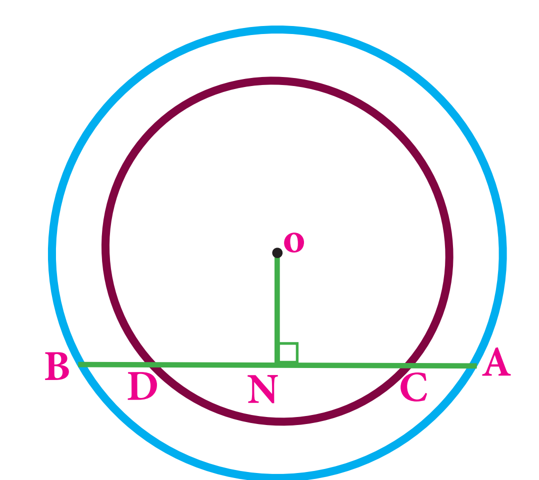
$= 9 + 16 = 25$

$BO = 5\ cm$

## مثال (3)

دائرتان متحدتان في المركز O .

$\overline{ON} \perp \overline{BA}$ أثبت ان : $AC = BD$




المعطيات /
المطلوب أثباته /
} تترك للطالب

البرهان /

في الدائرة الصغرى $\overline{ON} \perp \overline{CD}$

مبرهنة 12 $CN = DN$ .... (1)

كذلك في الدائرة الكبرى : $AN = BN$ .... (2)

من (1) و (2) نحصل على :

$AN - CN = BN - DN$ اذا طرحت كميات متساوية

من اخرى متساوية تبقى النتائج متساوية

$\therefore AC = BD$

## مبرهنه / 13 (عكس مبرهنة 12)

**قطر الدائرة المار بمنتصف الوتر يكون عمودياً على ذلك الوتر .**

### المعطيات /

$\overline{AB}$ وتر في دائرة مركزها O , $\overline{CD}$ قطر فيها ، $\overline{CD}$ ينصف الوتر $\overline{AB}$ في N .

### المطلوب أثباته /

$$\overline{CD} \perp \overline{AB}$$

### البرهان /

نرسم $\overline{OA}$ , $\overline{OB}$ (نصفا قطرين)

$OA = OB$ ....( نصفا قطرين في دائرة )

N منتصف $\overline{AB}$ ... ( معطى )

$\overline{ON} \perp \overline{AB}$ ... (خواص مثلث متساوي الساقين )

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$

C
o
B
N
A
D

(و . هـ . م )

**ملاحظة**

يمكن أثبات المبرهنة من تطابق المثلثين BON , OAN

## مثال (4)

في الشكل المجاور:

$\overline{AB}$ وتر في دائرة مركزها O , D

منتصف $\overline{AB}$ , $\overline{DO}$ // $\overline{BC}$ , $m\angle OBD = 30^0$

اثبت ان المثلث OBC متساوي الاضلاع

المعطيات /

المطلوب أثباته /

{ تترك للطالب

البرهان /

D منتصف $\overline{AB}$ .... ( معطى )

$\overline{OD} \perp \overline{AB}$ ..... ( مبرهنة 13 )

المثلث OBD قائم الزاوية في D

$m\angle OBD = 30^0$ ...... ( معطى )

$m\angle BOD = 60^0$ ..... (مجموع زوايا المثلث = $180^0$ )

$\because \overline{DO}$ // $\overline{BC}$ ....... ( معطى )

$m\angle OBC = m\angle BOD$ ... ( متبادلة )

$m\angle OBC = 60^0$

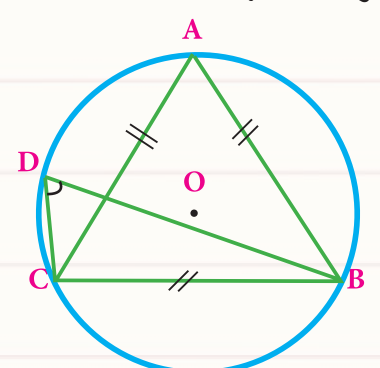
$m\angle OBC = m\angle OCB$ ...... ( زوايا قاعدة مثلث متساوي الساقين ( $OC = OB$ ) )

$m\angle COB = 60^0$ ..... (مجموع زوايا المثلث = $180^0$ )

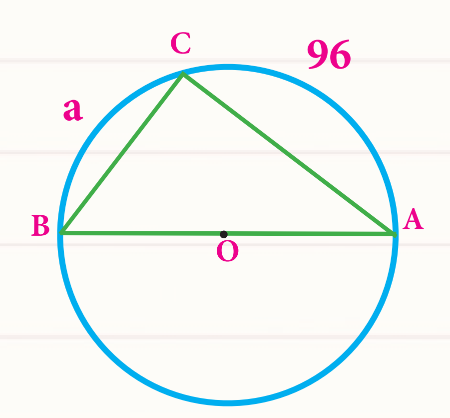
$\therefore$ المثلث BCO متساوي الاضلاع



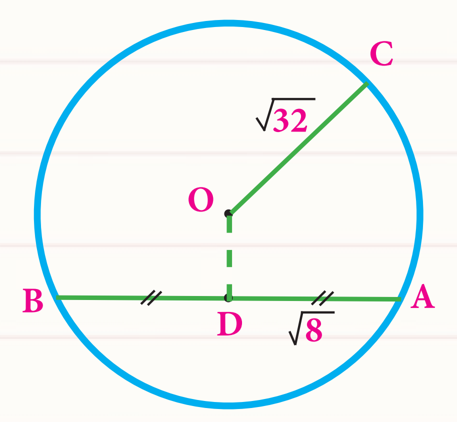

س1 / في الشكل المجاور: دائرة مركزها O فيها: $AB = BC = CA$ ، جد $m\angle BDC$




س2 / في الشكل المجاور: $m\overset{\frown}{AC} = 96$ , $m\overset{\frown}{BC} = a$ جد: قيمة a ، $m\angle C$ , $m\angle B$

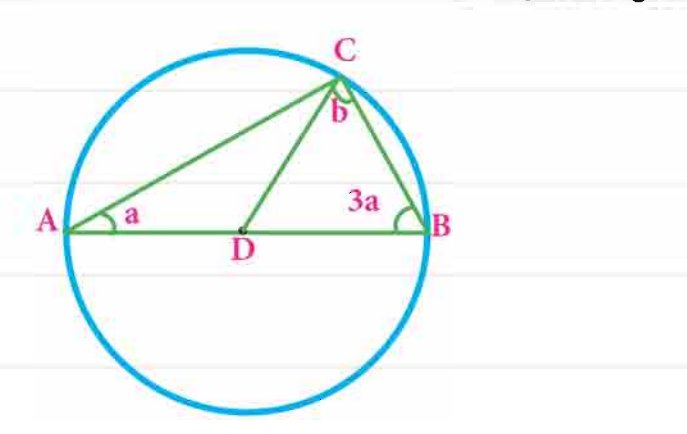



س3 / في الشكل المجاور: جد OD



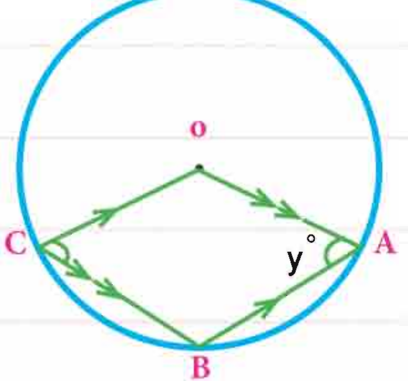

س4 / $\overline{AB}$ , $\overline{AC}$ وتران متطابقان في دائرة مركزها O ، برهن ان : $\overrightarrow{AO}$ ينصف $\angle BAC$

س5 / في الشكل المجاور : جد $b, a$

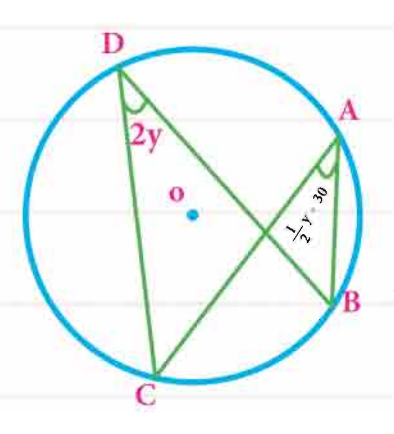



س6 / في الشكل المجاور : $\overline{CO} \parallel \overline{BA}$ , $\overline{OA} \parallel \overline{BC}$ جد قيمة $Y^\circ$

تلميح : أثبت ان OCBA معين ، ثم صل $\overline{OB}$ , هناك طريقة أخرى باكمال شكل رباعي دائري مع النقط $A, B, C$ .

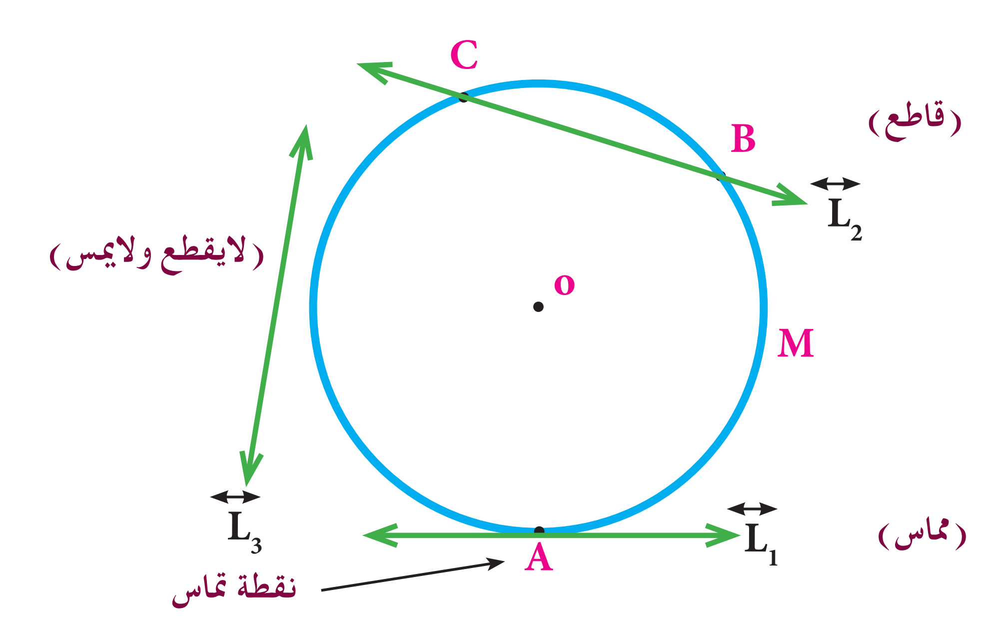



س7 / أنقل الشكل المجاور في دفترك حيث : $m\angle A = \frac{1}{2}y + 30$ , $m\angle D = 2y$ ، جد قيمة $y$ ، ثم أرسم في الشكل زاوية قياسها $(4y^0)$ .





# 6 – 4 التمـاسّ




لاحظ في الشكل أعلاه ان الدائرة M التي مركزها O :

**1** – تشترك مع $\overleftrightarrow{L_1}$ بنقطة واحدة فقط : $\{A\} = M \cap \overleftrightarrow{L_1}$ يسمى $\overleftrightarrow{L_1}$ مماساً للدائرة M في نقطة A

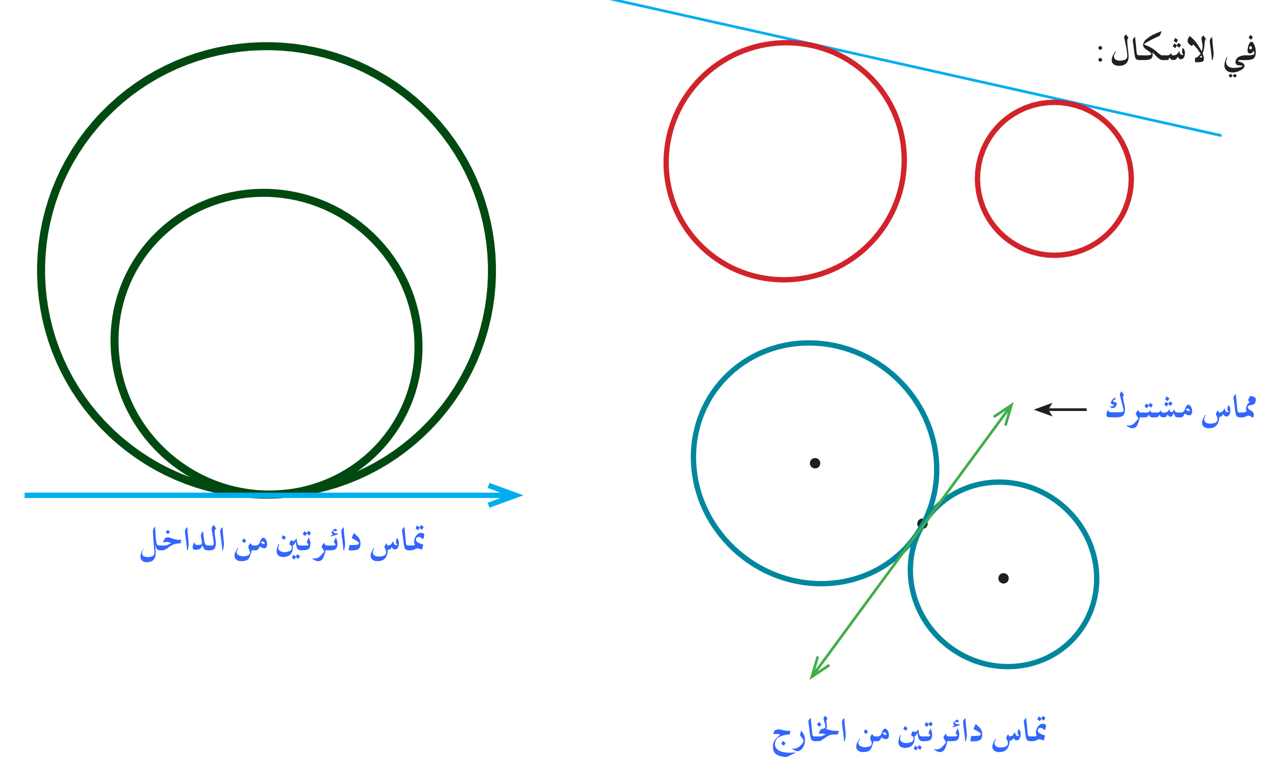
ولذلك فان :

> أي مستقيم في مستوي الدائرة ويشترك معها بنقطة واحدة فقط يسمى مماساً للدائرة
>
> في تلك النقطة (نقطة التماس) .

**2** – $\{C , B\} = M \cap \overleftrightarrow{L_2}$ يسمى $\overleftrightarrow{L_2}$ قاطع للدائرة.

**3** – $\varnothing = M \cap \overleftrightarrow{L_3}$ , $\overleftrightarrow{L_3}$ لا يمس ولا يقطع الدائرة (خارج الدائرة) .

مع ملاحظة ان المستقيم قد يمس اكثر من دائرة في نفس الوقت ويسمى في هذه الحالة مماساً مشتركاً كما في الاشكال :



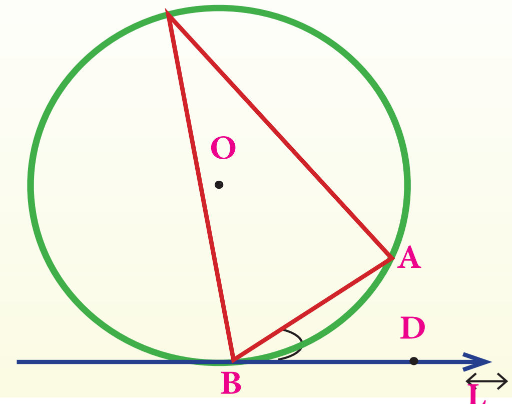

## تعريف [6-7]

**الزاوية المماسية :** هي الزاوية المحددة بمماس الدائرة ووترها المرسوم من نقطة التماس من الجهة الاخرى .

**في الشكل :** $\overleftrightarrow{L}$ مماس للدائرة التي مركزها O , $\overline{BA}$ وتر للدائرة تسمى الزاوية ABD زاوية مماسية.

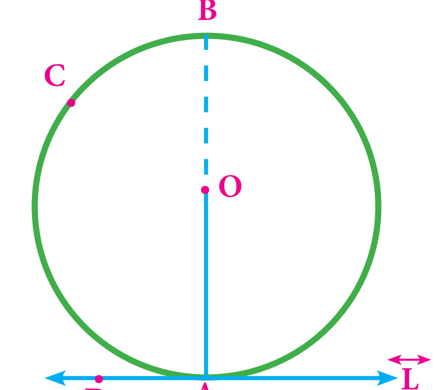
**عبارة اولية :** قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل للوتر الذي هو أحد أضلاع الزاوية المماسية .

$$m\angle ABD=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{AB}$$



## مبرهنة / 14

**المماس عمود على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.**




**المعطيات /**

دائرة مركزها O ، المستقيم L يمس الدائرة في نقطة A .

**المطلوب أثباته /**

$\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{L}$

**العمل والبرهان /**

نرسم القطر $\overline{AOB}$

$m\,\overset{\frown}{ACB} = 180^0$ .... (لان $\overline{AB}$ قطر في الدائرة )

$m\angle BAD = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{ACB}$ .... ( عبارة اولية )

$m\angle BAD = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$

$\therefore \overline{OA} \perp \overleftrightarrow{L}$ ( و . هـ . م )

برهان آخر : اذا لم يكن $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{L}$ نرسم من O , $\overline{ON} \perp \overleftrightarrow{L}$ في نقطة N.

نمد $\overline{AN}$ على أستقامتها الى النقطة P . بحيث ان $AN = NP$ .

المثلثان ONP , OAN متطابقان . «ضلعان وزاوية محصورة بينهما»

من التطابق نحصل على :

$OA = OP$

$\because A \in$ للدائرة

$\therefore P \in$ للدائرة

$\therefore \overline{OA} \perp \overleftrightarrow{L}$

**عبارة أولية :**

1 – من نقطة تنتمي للدائرة يمكن رسم مماس واحد فقط .

2 – المستقيم العمودي على مماس الدائرة من نقطة التماس يمر بمركز الدائرة .

## مثال (1)

في الدائرة التي مركزها O ، (الشكل المجاور)

$\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في A

$m\angle ABO = 35^\circ$ جد $m\angle AOB$ .

**الحل /** $\because$ $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في A ... معطى

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overline{AO}$

$\therefore m\angle OAB = 90^\circ$

بما ان $m\angle OBA = 35^\circ$ $\therefore$ معطى

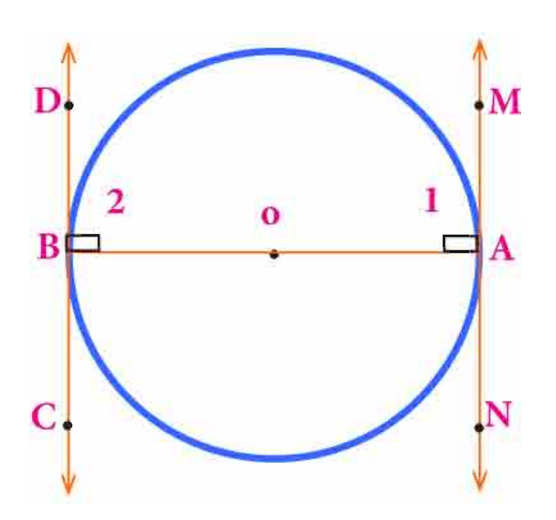
$\therefore m\angle AOB = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ مجموع زوايا مثلث $= 180^\circ$




## مثال (2)

دائرة مركزها O ، $\overline{AB}$ قطر فيها ، $\overleftrightarrow{MN}$ يمس الدائرة في A ، $\overleftrightarrow{DC}$ يمس الدائرة في B .

أثبت ان $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{DC}$




المعطيات / } تترك للطالب
المطلوب أثباته /

البرهان /

$\because$ $\overleftrightarrow{MN}$ مماس للدائرة في A

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$ ....... مبرهنة 13

$\therefore m\angle 1 = 90^\circ$ .......1

كذلك : $\therefore m\angle 2 = 90^\circ$ .......2

من 1 ، 2 : $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$

وهاتان الزاويتان داخليتان وعلى جهه واحدة من القاطع $\overline{AB}$ ، $\therefore \overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{DC}$

(يتوازي مستقيمان اذا قطعا بمستقيم ثالث وكانت الزاويتان الداخليتان الواقعتان في جهة واحدة من القاطع مجموعهما $180^0$) .

## مثال (3)

في الشكل المجاور :

$\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في A ،

$m\angle OAC = 5N , m\angle CAB = N$

$m\angle AOC = x^\circ$ جد قيمة $x , N$

**الحل/**

$\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في A

$\therefore \overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$(m\angle OAB = 90^\circ)$

$N + 5N = 90^\circ$

$6N = 90^\circ \Rightarrow N = 15^\circ$

$m\angle OAC = 5 \times 15^\circ = 75^\circ$

$\therefore OA = OC$ ( انصاف اقطار الدائرة )

$m\angle OCA = 5N$ زاويتا قاعدة مثلث متساوي الساقين

$\therefore \quad m\angle OCA = 5 \times 15^\circ = 75^\circ$

$m\angle OCA + m\angle OAC + m\angle AOC = 180^\circ$ .... ( مجموع زوايا المثلث )

$75^\circ + 75^\circ + X = 180^\circ$

$\therefore X = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

## مبرهنة / 15 (عكس مبرهنة 14) .

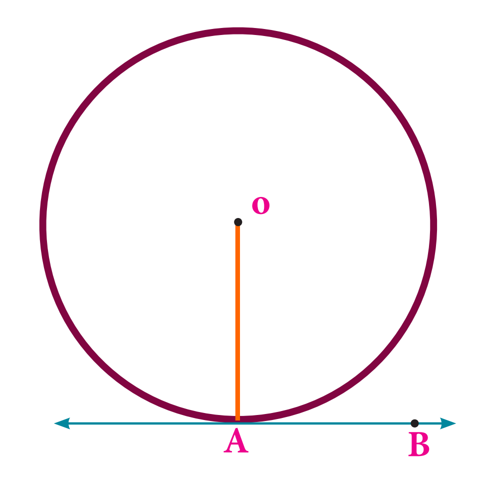
**المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته المنتميه للدائرة يكون مماساً للدائرة .**

سوف نقبل المبرهنة بدون برهان

**توضيح :**



$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OA}$ في A




حيث $\overline{OA}$ نصف قطر لدائرة .

عند ذلك نحصل على ان :

$\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في A .

**نتيجة مبرهنة 15 :**

**نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث هي مركز الدائرة التي تمس اضلاع المثلث**

**توضيح :**

**في الشكل :**

منصفات زوايا المثلث هي : $\overline{AO}$ , $\overline{CO}$ , $\overline{BO}$

التقت في O فتكون O مركز الدائرة التي

تمس اضلاع المثلث ABC .

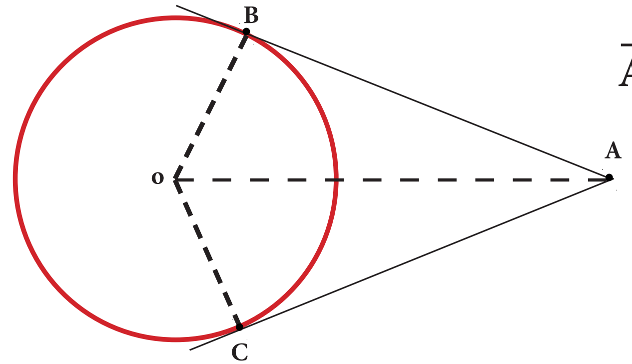
( كما درسنا ذلك في موضوع المثلث )

اي ان $OP = OQ = OR$

وكل منها يمثل نصف قطر للدائرة .

## مبرهنة / 16

**القطعتان المماسيتان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان .**




**المعطيات /**

دائرة مركزها O ، للدائرة $A \notin$ ، $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$

قطعتان مماسيتان للدائرة من A .

**المطلوب اثباته /**

$AB = AC$

**العمل والبرهان /** نكمل الشكل الرباعي ABOC

ونصل $\overline{AO}$

$\because$ $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ تمسان الدائرة في B ، C ...... (معطى)

$\therefore$ $\overline{OB} \perp \overline{AB}$ , $\overline{AC} \perp \overline{OC}$ ... ( نصف القطر عمودي على .... )

$\overline{OA}$ ضلع مشترك في $\Delta\Delta$ ABO ، ACO

$\overline{OB} \cong \overline{OC}$ نصفا قطرين في دائرة

$\therefore$ يتطابق المثلثان القائما الزاوية (وتر وضلع قائم)

من التطابق : $AB = AC$ .

**نتيجة مبرهنة 16 :**

اذا رسم لدائرة من نقطة خارجة عنها قطعتان مماسيتان او (مماسان) فانهما :

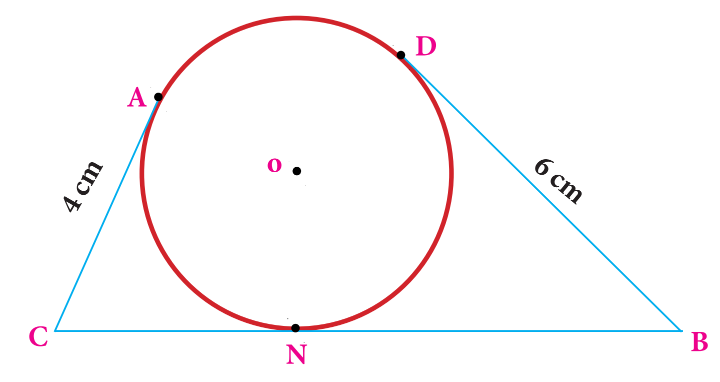
1 – تقابلان زاويتين مركزيتين متساويتين .

2 – قطعة المستقيم الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة الخارجة عن الدائرة تنصف الزاوية التي ضلعاها القطعتان المماسيتان .

3 – قطعة المستقيم الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة الخارجة عنها عمودية وتنصف قطعة المستقيم الواصلة بين نقطتي التماس .

## مثال (4)

في الشكل المجاور : دائرة مركزها O , $\overline{BD}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$ مماسات للدائرة, جد BC .




**الحل /**

BN = BD .... مماسان لدائرة من نقطة خارجة عنها

$\therefore$ BN=6 cm

CN=CA

$\therefore$ CN=4 cm

$\because$ BC=CN + NB

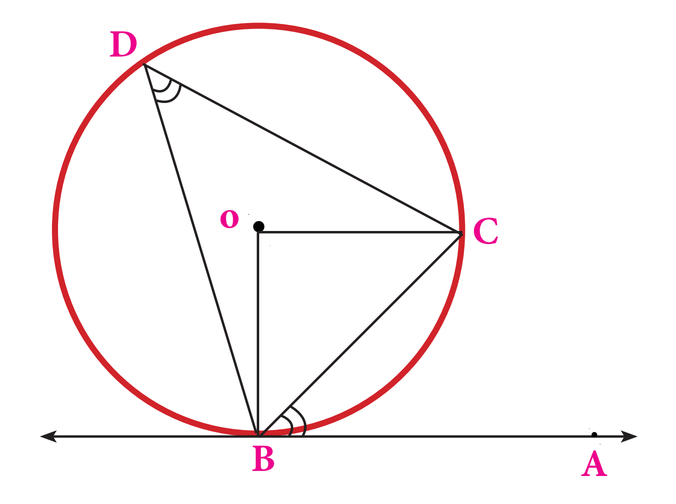
$\therefore$ BC=4+6=10 cm

## مبرهنة / 17

قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر الدائرة (ضلع الزاوية) من الجهة الاخرى .



( تقبل بدون برهان )




في الشكل المجاور :

دائرة مركزها O ، $\overleftrightarrow{BA}$ مماس للدائرة في B

$\angle$ ABC زاوية مماسية ،

$\angle$ BDC زاوية محيطية تقابل وتر

الدائرة $\overline{BC}$ ( ضلع للزاوية المماسية ) .

$$m\angle ABC = m\angle BDC$$

## مثال ( 5 )

في الشكل المجاور :

جد $m\angle 2$ , $m\angle 3$

**الحل /**

$\because$ $\overline{AB}$ تمس الدائرة في C

$\therefore$ $m\angle 1 = m\angle ACE$ (مبرهنة 17)

$m\angle 1 = 74^\circ$

$\because$ $DE = CE$

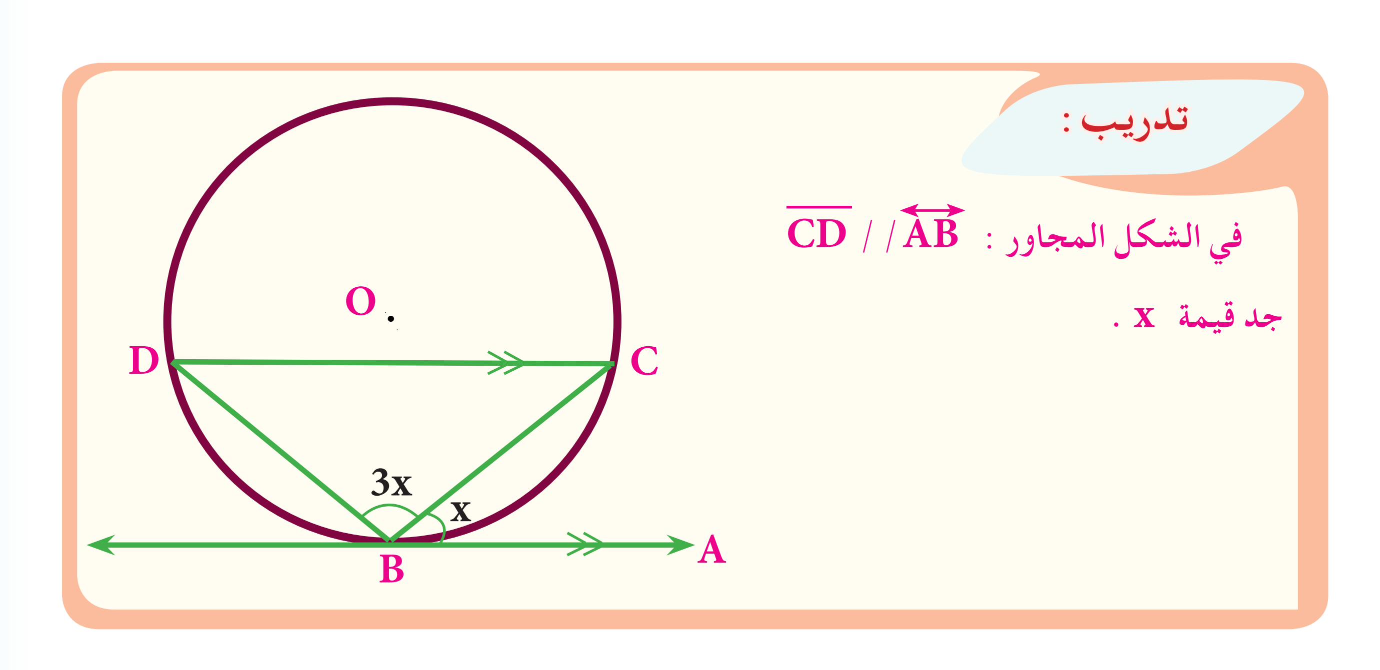
$\therefore$ $m\angle 1 = m\angle 2$ ...... ( خواص مثلث متساوي الساقين )

$\therefore$ $m\angle 2 = 74^\circ$

$m\angle 3 = 180^\circ - (m\angle 1 + m\angle 2)$ .... مجموع زوايا مثلث = $180^\circ$

$m\angle 3 = 180^\circ - 148^\circ$

$m\angle 3 = 32^\circ$

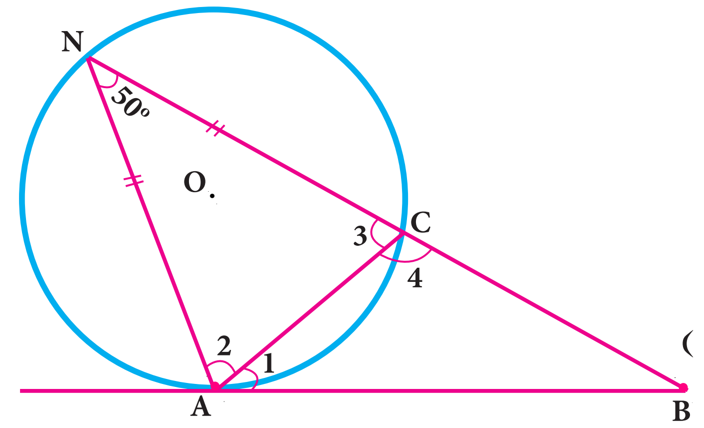


**تدريب :**

في الشكل المجاور : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overline{CD}$

جد قيمة x .

## مثال (6)




في الشكل المجاور

جد $m\angle ABN$

**الحل/**

$m\angle 1 = m\angle N$ .... ( زاوية مماسية )

$\therefore m\angle 1 = 50^\circ$

$\because CN = AN$ ... (معطى)

$\therefore m\angle 3 = m\angle 2$ ... ( زاويتا قاعدة مثلث متساوي الساقين )

$\therefore m\angle N + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ .... ( زوايا مثلث )

إبدال $m\angle 3$ بـ $m\angle 2$

$50^\circ + 2m\angle 2 = 180^\circ$

$2m\angle 2 = 130^\circ$

$\therefore m\angle 2 = 65^\circ$

في المثلث $ABC$ :

$m\angle 3 - 180^\circ = m\angle 4$ ... ( زاوية مستقيمة )

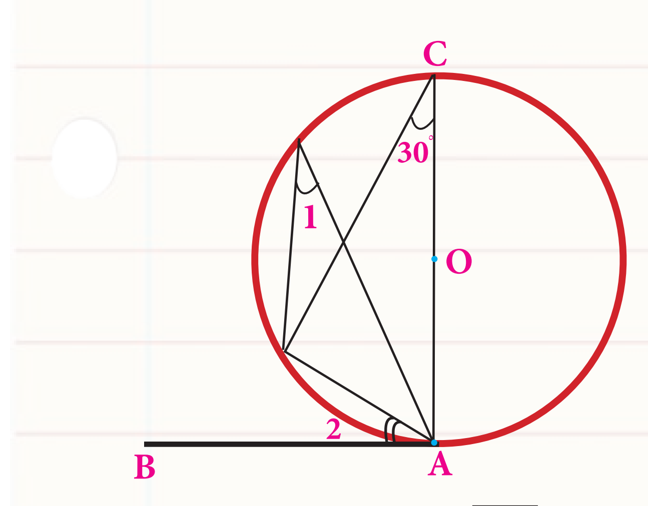
$\therefore m\angle 4 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$

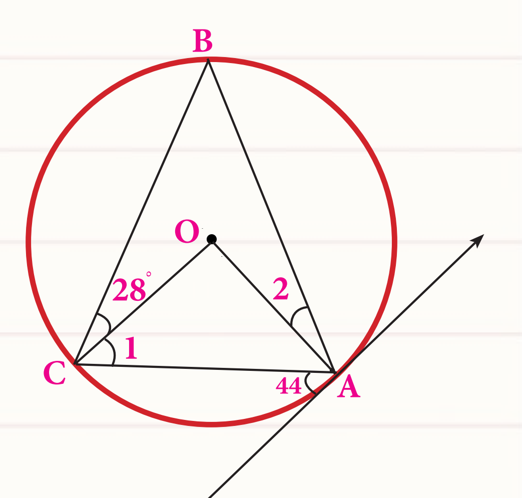
$\therefore m\angle B = 180^\circ - (m\angle 1 + m\angle 4)$

$\therefore m\angle B = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ$

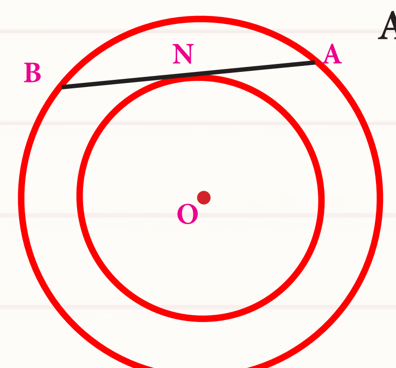



س1 / في الشكلين المجاورين جد قياسات الزوايا المرقمة : 1، 2



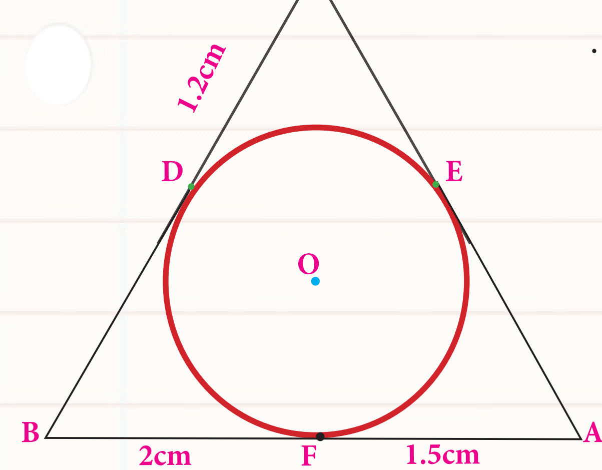




س2 / في الشكل المجاور : دائرتان متحدتان في المركز O ، $\overline{AB}$ وتر في الدائرة الكبرى ويمس الدائرة الصغرى في N اثبت ان: $AN = NB$




س3 / ABC مثلث قائم الزاوية في C ، رسم $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ، اثبت ان $\overleftrightarrow{AC}$ يمس الدائرة المارة برؤوس المثلث BCD.

س4 / في الشكل المجاور : جد محيط المثلث ABC.



# 7 الفصل السابع

# الهندسة الاحداثية

# coordinate geometry

[1–7] المستوي الاحداثي .

[2–7] المسافة في المستوي الاحداثي .

[3–7] احداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيم في المستوي الاحداثي .

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
|---|---|
| الزوج المرتب | $(x, y)$ |
| المسافة بين نقطتين $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ | $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ |
| منتصف قطعة مستقيمة $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ | $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ |

الفصل 7

# 7 – 1 المستوي الاحداثي
# the Coordinate Plane

يتكون المستوي الاحداثي من محورين متعامدين في نقطة تدعى نقطة الاصل (Origin Point) وهي

عبارة عن الزوج المرتب (0 , 0) O .

- المحور الافقي يدعى محور السينات **x-axis** .
- المحور العمودي عليه يدعى محور الصادات **y-axis** .

وكل منهما مقسم الى اجزاء متساوية في الطول تدعى الوحدة (**unit**) والشكل المجاور يوضح ذلك .

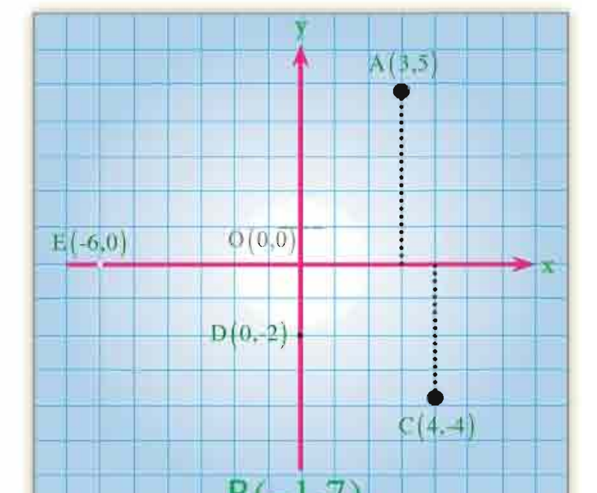
ويمكن تحديد موقع اية نقطة في المستوي من خلال معرفة احداثيها السيني واحداثيّها الصادي وهو مايدعى بالزوج المرتب **pair** والذي يكتب بشكل (x , y)

**تدريب :** عين النقط الاتية في المستوي الاحداثي :

A(3,5) , B (–1,–7) , C (4,–4) , D (0,–2) , E (–6 , 0)

**الحل /**

نرسم مستوي الاحداثي على الاوراق البيانية ( ورق عادي ) .



# 7 - 2 المسافة في المستوي الاحداثي
# Distance in The Coordinate Plane

## [7 - 2 - 1] يمكن ان نجد المسافة

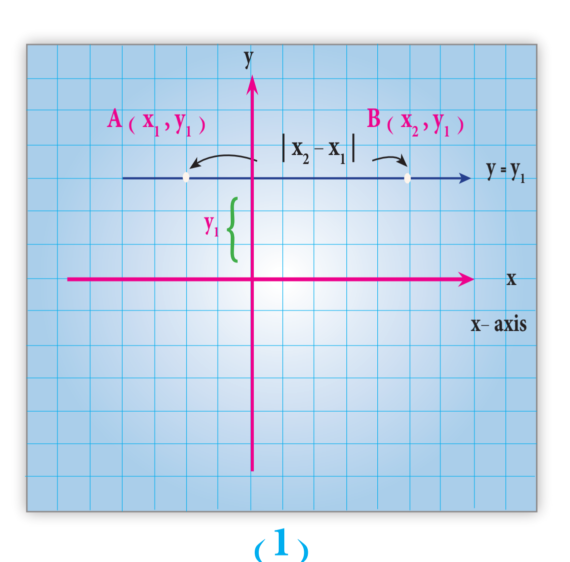
بين نقطتين على مستقيم افقي (يوازي محور السينات) او مستقيم عمودي (يوازي محور الصادات) باستخدام المسطرة او كما درست سابقاً :

*اذا كانت A , B تنتميان لمستقيم معلوم يوازي محور السينات حيث $A(x_1, y_1)$ , $B(x_2, y_1)$ فان البعد بين النقطتين A , B كما في الشكل (1) .

هو : $AB = |x_1 - x_2|$ او $AB = |x_2 - x_1|$

* اذا كانت A , B تنتميان لمستقيم معلوم يوازي محور الصادات حيث $A = (x_1, y_1)$ , $B = (x_1, y_2)$ فان البعد بين النقطتين A , B كما في الشكل (2) .

هو : $AB = |y_2 - y_1|$ او $AB = |y_1 - y_2|$



(1)

فمثلاً : اذا كان $A = (5, 3)$ , $B = (-2, 3)$

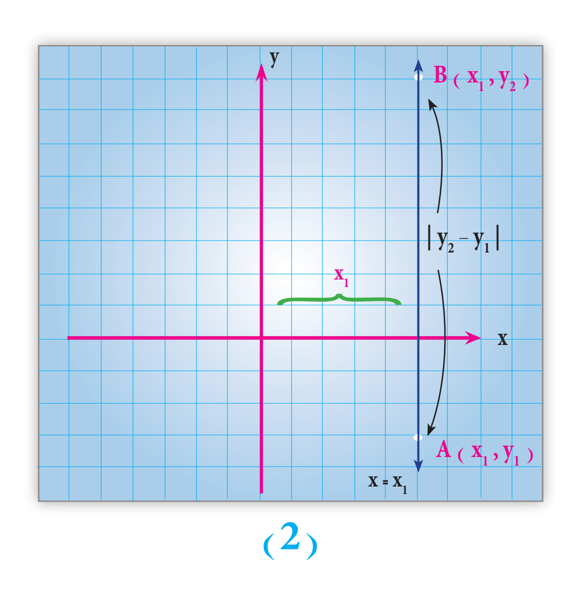
فأن :

$$AB = |x_2 - x_1| = |-2 - 5| = |-7| = 7$$

اذا كان $B = (5, 8)$ , $A = (5, -3)$

فأن :

$$AB = |y_2 - y_1| = |8 - (-3)| = |11| = 11$$



(2)

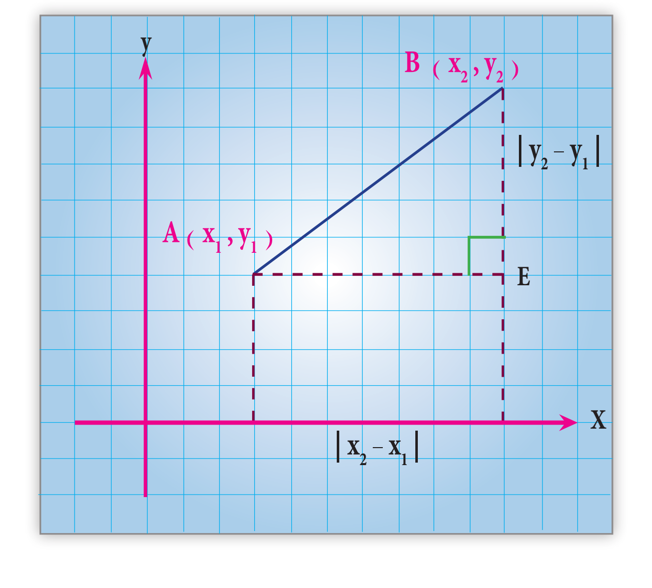
والآن : اذا كانت النقطتان A , B لاتنتميان الى مستقيم يوازي محور السينات ولا الى مستقيم يوازي محور الصادات . فكيف نجد المسافة بين النقطتين A , B ؟

## [7 – 2 – 2] قانون المسافة بين النقطتين في المستوي الاحداثي

لتكن : $A(x_1 , y_1)$ , $B(x_2 , y_2)$ تنتميان الى المستوي الاحداثي

من الشكل : المثلث AEB قائم الزاوية في E . نجد ان :

$$AE = |x_2 - x_1| \ , \ BE = |y_2 - y_1|$$




وحسب مبرهنة فيثاغورس :

$$(AB)^2 = (AE)^2 + (BE)^2$$

وبالتعويض عن AE , BE نجد

$$(AB)^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$$

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

حيث $|x|^2 = x^2$

## [7 – 2 – 3] بعض تطبيقات قانون المسافة بين نقطتين

في هذه المرحلة سنذكر بعض تطبيقات القانون :

**اولاً :** اثبات ان نقط مثل A , B , C على استقامة واحدة .

**الطريقة :**

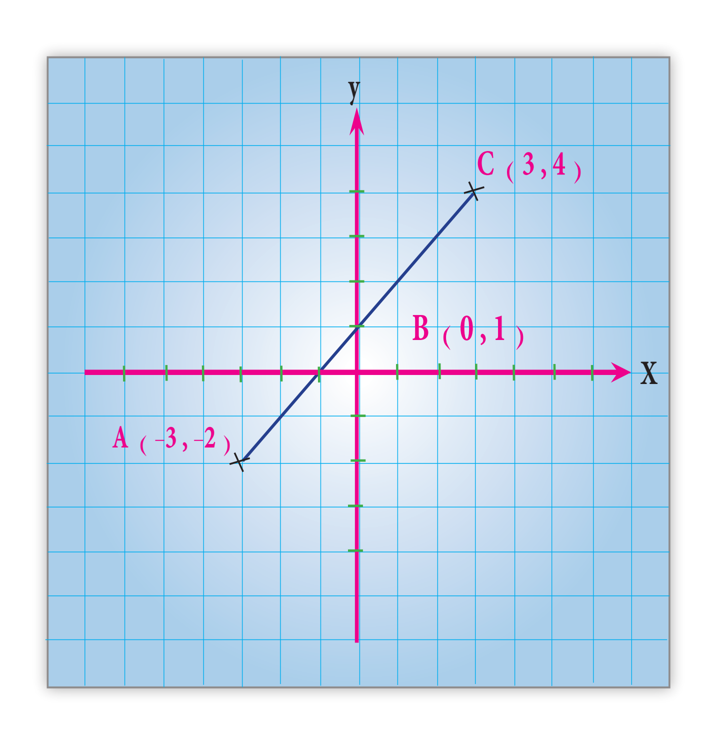
- نثبت النقط المعطاة في المستوي الاحداثي .
- نجد المسافة بين كل نقطتين ثم نبسط الناتج .
- فاذا كان الكل يساوي مجموع الاجزاء فان النقط على استقامة واحدة .



## مثال (1)

بين ان النقاط $A=(-3,-2), B=(0,1), C=(3,4)$ على استقامة واحدة

**الحل/**




$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$AB=\sqrt{(0+3)^2+(1+2)^2}$$

$$=\sqrt{(3)^2+(3)^2}$$

$$AB=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(3-0)^2+(4-1)^2}$$

$$=\sqrt{(3)^2+(3)^2}$$

$$BC=3\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(3+3)^2+(4+2)^2}$$

$$=\sqrt{(6)^2+(6)^2}$$

$$=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$$

$$AC=6\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{2}=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}$$

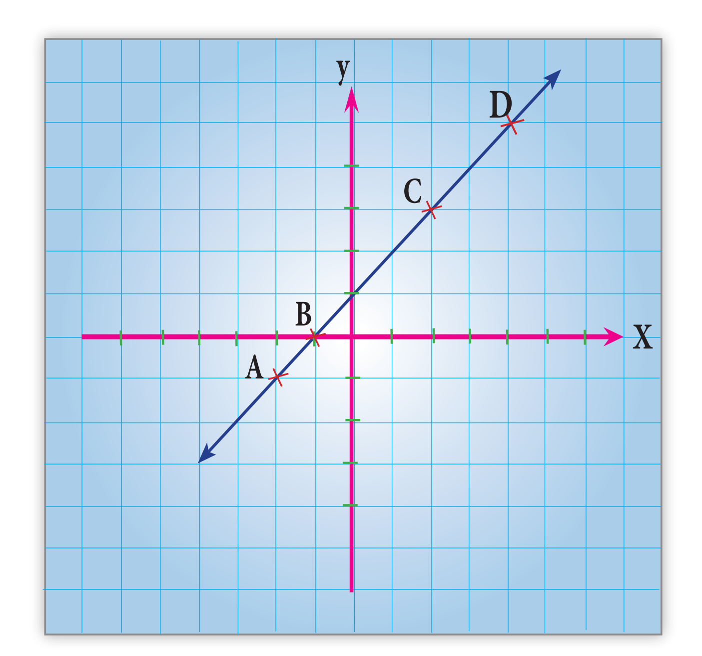
اي $AC=AB+BC$

اذن : $A, B, C$ نقط تقع على استقامة واحدة



## مثال (2)

اثبت ان النقط : $A(-2,-1), B(-1,0), C(2,3), D(4,5)$ تقع على خط مستقيم واحد




**الحل /**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB=\sqrt{(-1+2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(2+1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$DC=\sqrt{(4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

والان نجد طول **AD**

$$AD=\sqrt{(4+2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

لاحظ ان : $6\sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

اي : $AD = AB + BC + CD$

اذن : النقط $A, B, C, D$ تقع على مستقيم واحد



ثانياً :



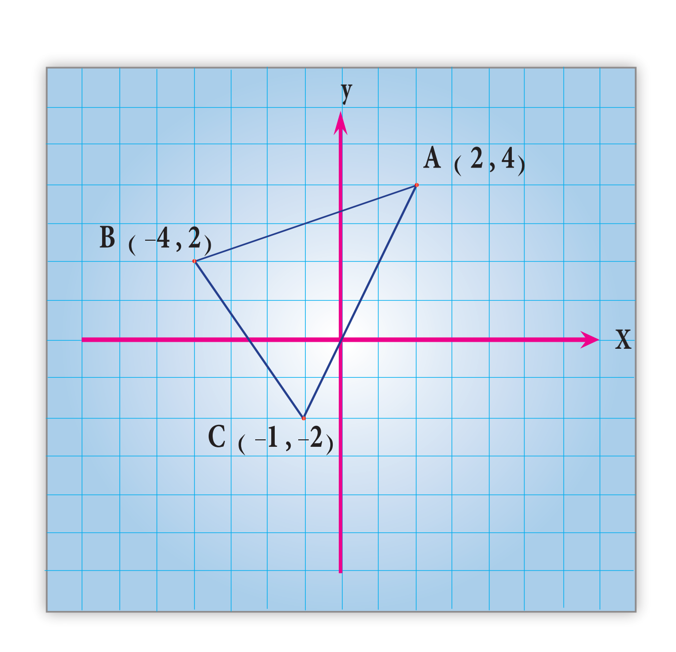
## نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه :

فهو اما متساوي الاضلاع او متساوي الساقين او مختلف الاضلاع .

### مثال (3)

بين نوع المثلث A B C من حيث اضلاعه حيث $A(2,4), B(-4,2), C(-1,-2)$

**الحل /**




$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-4)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-4)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

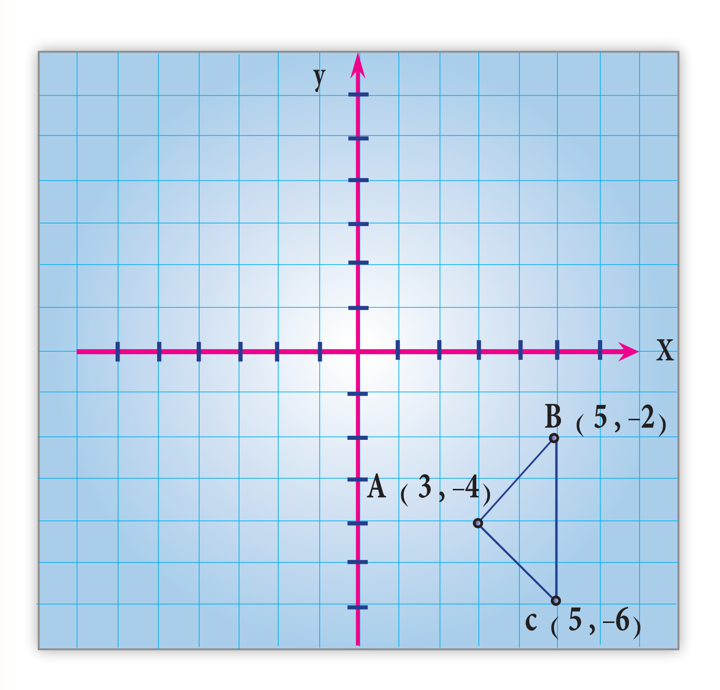
$$= 3\sqrt{5}$$

لاحظ ان : $AB \neq AC \neq BC$

∴ المثلث مختلف الاضلاع

## مثال (4)

بين ان المثلث الذي رؤوسه $C(5, -6)$ , $B(5, -2)$ , $A(3, -4)$ متساوي الساقين




**الحل /**

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$AB=\sqrt{(5-3)^2+(-2+4)^2}$$

$$=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(5-5)^2+(-6+2)^2}$$

$$=\sqrt{0+16}=4$$

$$AC=\sqrt{(5-3)^2+(-6+4)^2}$$

$$=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

$\because AB=AC$

$\therefore$ المثلث ABC متساوي الساقين




### أختبار المثلث القائم الزاوية

نجد اطول اضلاعه ، فاذا تحققت مبرهنة فيثاغورس فان المثلث قائم الزاوية

## مثال (5)

بين ان المثلث الذي رؤوسه $C(3, -2)$ , $B(3, 4)$ , $A(-2, -2)$ قائم الزاوية .

**الحل /**

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

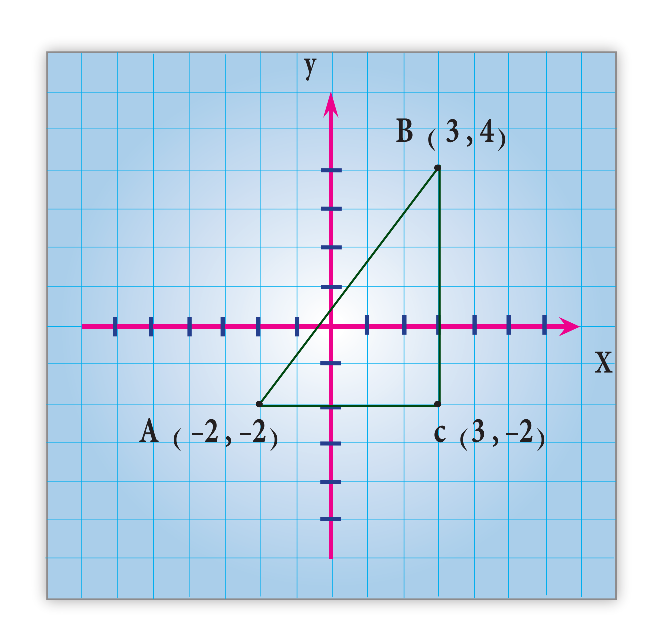
$$AB=\sqrt{(3+2)^2+(4+2)^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$$

$$AC=\sqrt{(3+2)^2+(-2+2)^2}$$

$$=\sqrt{25+0}=\sqrt{25}$$

$$BC=\sqrt{(3-3)^2+(-2-4)^2}$$

$$=\sqrt{0+36}=\sqrt{36}$$




لاحظ ان : $\left(\sqrt{61}\right)^2=\left(\sqrt{25}\right)^2+\left(\sqrt{36}\right)^2$

$$61=25+36$$

اي : $(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2$

∴ المثلث **ABC** قائم الزاوية في **C** .

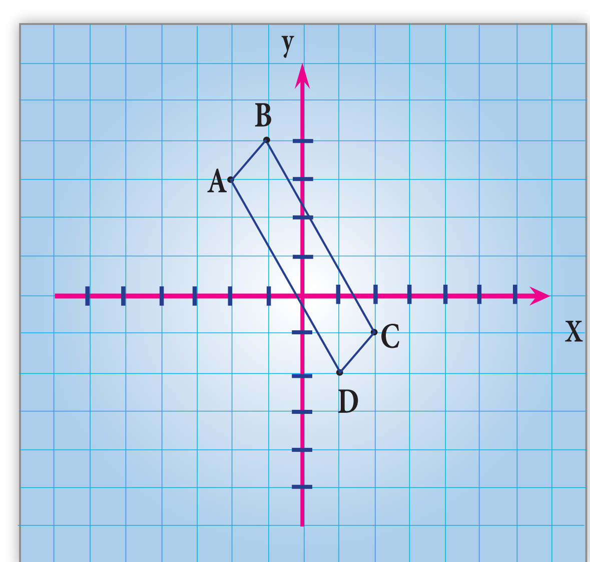


رابعاً :

## تطبيقات أخرى

### مثال (6)

بين ان النقط : **D(1 ,−2)** ، **C (2 , −1)**، **B (−1 , 4)** ، **A (−2 , 3)** رؤوس متوازي اضلاع **ABCD** .




**الحل /** $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$AB=\sqrt{(-1+2)^2+(4-3)^2}$$

$$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$DC=\sqrt{(1-2)^2+(-2+1)^2}$$

$$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\therefore AB=DC$$

$$AD=\sqrt{(1+2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

$$BC=\sqrt{(2+1)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

$$\therefore AD=BC$$

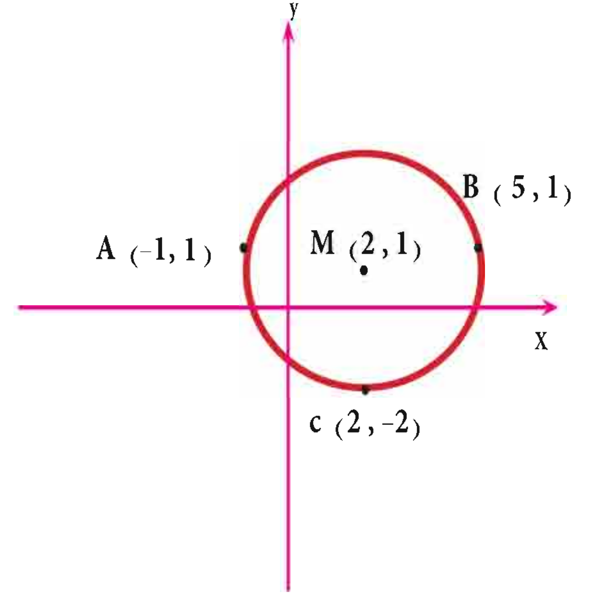
∴ الشكل **ABCD** متوازي اضلاع




يين ان النقط ( 2 , -2 ) C ، ( 5 , 1 ) B ، ( -1 , 1 ) A تقع على دائرة مركزها ( 2 , 1 ) M

جد طول قطرها .

**الحل/**




$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

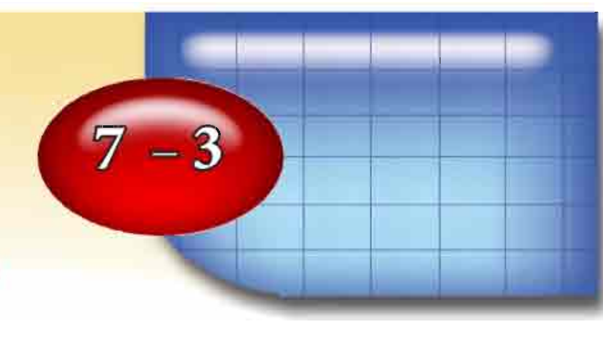
$$MA=\sqrt{(-1-2)^2+(1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

$$MB=\sqrt{(5-2)^2+(1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

$$MC=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{0+9} = 3$$

$$\because MA=MB=MC$$

اذاً : A ، B ، C تقع على الدائرة التي مركزها M طول القطر = 6 وحدات .



## 3 – 7 احداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيم في المستوي الاحداثي

في المستوي الاحداثي نعلم ان النقطة تتعين بزوج مرتب من الاعداد الحقيقية

فاذا فرضنا ان ( x ,y ) M هي منتصف $\overline{AB}$ حيث $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$ فسنقبل بدون برهان العلاقة الاتية :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



## مثال (1)

لتكن ( 3 , −5 ) A ، ( 5 , 1 ) B جد C منتصف $\overline{AB}$ .

**الحل/**

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$C=\left(\frac{3+5}{2},\frac{-5+1}{2}\right)$$

$$C=\left(\frac{8}{2},\frac{-4}{2}\right)$$

$$C=(4,-2)$$

نقطة المنتصف (Mid Point)



## مثال (2)

اذا كانت $C=\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت ( −1 , −2 ) A فجد احداثي النقطة B .

**الحل/**

$$C=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{-1+x_2}{2},\frac{-2+y_2}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}=\frac{-1+x_2}{2}\Rightarrow -2+2x_2=6\Rightarrow 2x_2=8\Rightarrow x_2=4$$

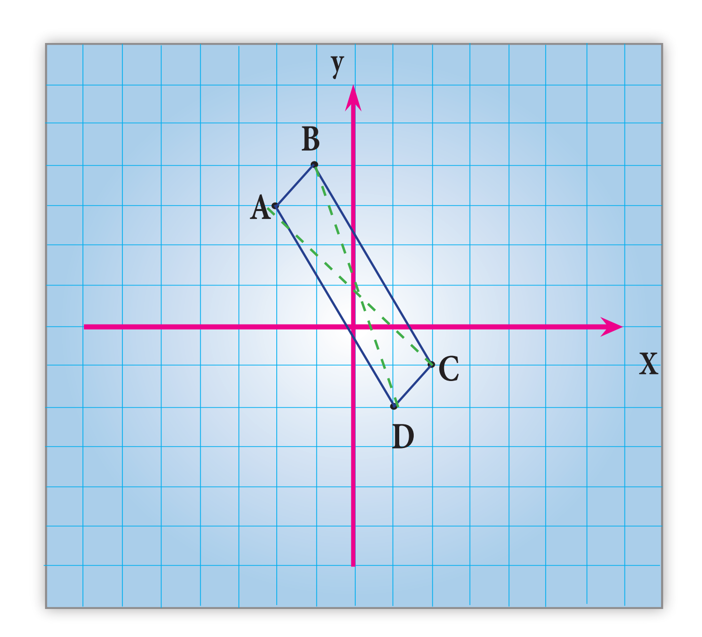
$$\frac{-1}{2}=\frac{-2+y_2}{2}\Rightarrow -4+2y_2=-2\Rightarrow 2y_2=2\Rightarrow y_2=1$$

$$\therefore\ B=(4,1)$$



مثال (3)

بين ان النقط $D(1,-2)$ ، $C(2,-1)$ ، $B(-1,4)$ ، $A(-2,3)$ رؤوس متوازي الاضلاع ABCD باستخدام قانون المنتصف.




**الحل/**

نجد منتصف القطر $\overline{AC}$

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M_1=\left(\frac{-2+2}{2},\frac{3+(-1)}{2}\right)$$

$$M_1=(0,1)$$

نجد منتصف القطر $\overline{BD}$

$$M_2=\left(\frac{-1+1}{2},\frac{4+(-2)}{2}\right)$$

$$M_2\ (0,1)$$

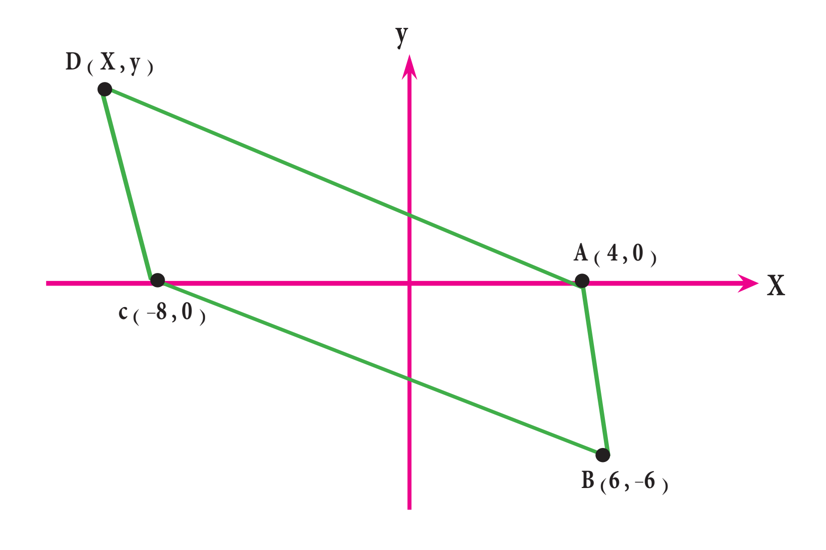
$\therefore M_2 = M_1$ الشكل ABCD متوازي اضلاع لان قطريه احدهما ينصف الاخر.



## مثال (4)

لتكن $C(-8,0)$ ، $B(6,-6)$ ، $A(4,0)$ جد احداثييّ النقطة D اذا كان الشكل ABCD هو متوازي اضلاع .

**الحل /**




$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

نجد منتصف القطر $\overline{AC}$

$$M_1=\left(\frac{4+(-8)}{2},\frac{0+0}{2}\right)$$

$$M_1=(-2,0)$$

نجد منتصف القطر $\overline{BD}$

$$M_2=\left(\frac{x+6}{2},\frac{y-6}{2}\right)$$

قطرا متوازي الاضلاع احدهما ينصف الاخر

اي : $\therefore\ M_2=M_1$

$$\frac{x+6}{2}=-2 \Rightarrow x+6=-4$$

$$x=-10$$

$$\frac{y-6}{2}=0 \Rightarrow y-6=0$$

$$y=6$$

$$\therefore\ D=(-10,6)$$




س1/ بين ان النقاط : $C(6,4)$ ، $B(2,1)$ ، $A(-2,-2)$ تقع على استقامة واحدة .

س2/ هل النقط الاتية تقع على استقامة واحدة: $C(0,8)$ ، $B(0,0)$ ، $A(6,8)$ ؟

س3/ دائرة مركزها النقطة $O(6,8)$ والنقطة $A(-3,-4)$ تنتمي لها جد طول قطر هذه الدائرة.

س4/ بين نوع المثلث الذي رؤوسه $C(6,4)$ ، $B(2,1)$ ، $A(2,-2)$ «متساوي الساقين

متساوي الاضلاع ، مختلف الاضلاع » .

س5/ بين ان المثلث الذي رؤوسه $C(-1,1)$ ، $B(2,1)$ ، $A(2,-1)$ قائم الزاوية ثم جد

مساحة المنطقة المثلثة .

س6/

بين بطريقتين ان الشكل الذي رؤوسه $D(-4,7)$ ، $C(1,9)$ ، $B(2,7)$ ، $A(-3,5)$

متوازي اضلاع .

س7/

ABCD متوازي اضلاع رؤوسه $C(7,3)$ ، $B(5,0)$ ، $A(1,0)$ جد احداثي الرأس الرابع D

س8/

مثلث ABC رؤوسه $C(0,-4)$ ، $B(-2,6)$ ، $A(6,4)$ تحقق من ان طول القطعة المستقيمة

الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه يساوي نصف طول الضلع الثالث.

س9/

ABC مثلث حيث $C(-6,-8)$ ، $B(6,8)$ ، $A(0,10)$ تحقق من ان طول القطعة

المستقيمة الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر .

# 8

## الفصل الثامن

# التحويلات الهندسية

[8-1] التحويلات الهندسية .

[8-2] الآنعكاس

[8-2-1] الآنعكاس على مستقيم في المستوي

[8-2-2] الإنعكاس على المستوي الإحداثي

[8-3] الآنسحاب على المستوي الإحداثي

[8-4] الدوران

[8-4-1] الدوران على مستوٍ حول نقطة

[8-5] التكبير

[8-6] المجموعات المتناسبة

[8-7] التشابه

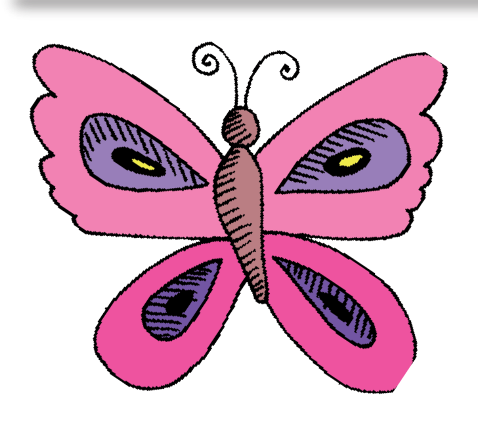
| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
|---|---|
| الانعكاس حول المحور السيني | $R_x$ |
| الانعكاس حول المحور الصادي | $R_y$ |
| الدوران حول $90^\circ$ | $R_{90^\circ}$ |
| التكبير | D |
| الانسحاب | T |



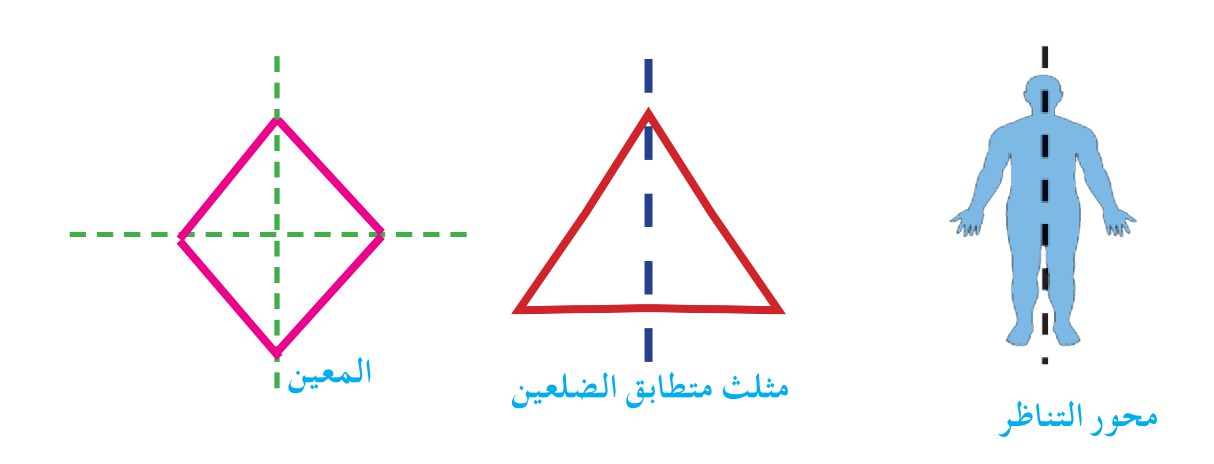

# التحويلات الهندسية

8 – 1

## مقدمة



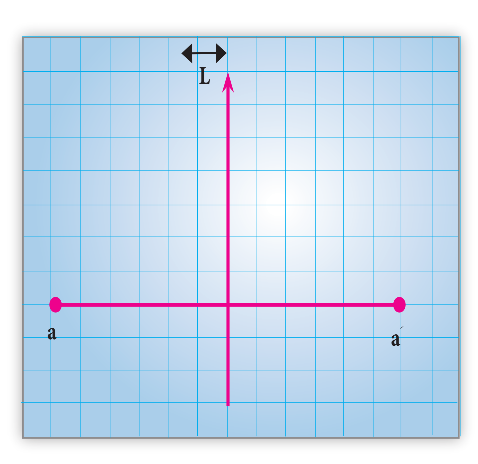
التحويلات الهندسية هي احد فروع الهندسة الذي يدرس تطابق الاشكال الهندسية ، حيث يقال لشكلين هندسيين متطابقان اذا انطبقت كل نقطة من نقاطهما على الاخر وهذا التطابق نلاحظه بما في الطبيعة من اجسام متحركة او جامدة فمثلا ينطبق جناحا الفراشة احدهما على الاخر وكذلك الكتاب تتطابق اوراقه وان جسم الانسان ينقسم الى نصفين متناظرين بوساطة محور نسميه محور التناظر وعند وقوفك امام مرآة مستوية تشاهد صورتك نفسها تماما في المرآة . وان خط المرآة بمثابة محور التناظر ومن خلال الاشكال التالية نلاحظ محور التناظر لكل شكل هندسي.




ان هذا التحويل الذي ينقل كل نقطة في المستوي الى نقطة اخرى في المستوي نفسه يسمى بالتحويل الهندسي . ومن أمثلته الانعكاس (Reflection) , والانسحاب (Transltion) وسنتطرق في هذا الفصل إلى تحويلات هندسية اخرى كالدوران والتكبير .

# 8 – 2 الانعكاس Reflection

## [8 – 2 – 1] الانعكاس على مستقيم في المستوي :

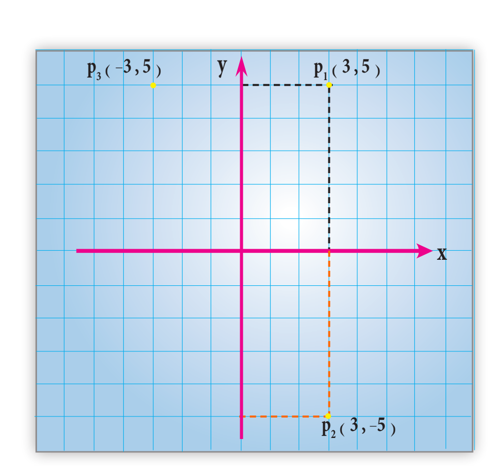



نفرض أن L مستقيم في المستوي x وأن التطبيق R , حيث $R : x \longrightarrow x$ والنقطة a لا تنتمي للمستقيم L $( a \notin \overleftrightarrow{L} )$

فاذا كان R تطبيق تقابل . فان R تحويل هندسي يسمى آنعكاساً على $\overleftrightarrow{L}$ ونرمز له بالرمز $R_L$ ويسمى $\overleftrightarrow{L}$ أيضاً محور الآنعكاس.

من الشكل أن $R_L$ يحول النقط من المستوي الواقعة في إحدى جهتي المستقيم L الى الجهة الأخرى منه بينما النقاط الواقعة عليه تبقى في موضعها . ويكون $\overleftrightarrow{L}$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $a\,a'$ .

## [8 – 2 – 2] الانعكاس على المستوى الاحداثي :




في المستوى الإحداثي المتعامد تكون صورة النقطة $p_1 ( 3 , 5 )$ بالنسبة لمحور التناظر x $( x : axis )$ هي $p_2 ( 3 , -5 )$. بعد. النقطة $p_1$ بالنسبة لمحور x يساوي بعد النقطة $p_2$ بالنسبة لمحور x . وبصورة عامة يمكن إستنتاج القاعدة التالية :

$$R_x [ ( x , y ) ] = ( x , -y )$$

حيث $R_x$ يسمى آنعكاساً بالنسبة لمحور السينات x $( x : axis )$ حيث $( y = 0 )$ . ومن الشكل أيضاً لاحظ صورة النقطة $p_1 ( 3 , 5 )$ بالنسبة لمحور الصادات y $( y : axis )$ هي $p_3 ( -3 , 5 )$ .

كما تلاحظ أيضاً أن بعد النقطة P بالنسبة عن محور الصادات يساوي بعد النقطة $P_3$ عن محور الصادات وهذا يسهل أستنتاج القاعدة التالية .

$$R_y [ ( x , y ) ] = ( -x , y )$$

حيث $R_y$ يسمى آنعكاساً بالنسبة لمحور الصادات y $( y : axis )$ حيث $( x = 0 )$ .

## مثال (1)

اذا كانت $p(3,-4)$ . فجد :

1) صورة آنعكاس النقطة P بالنسبة لمحور السينات .

2) صورة آنعكاس النقطة P بالنسبة لمحور الصادات .

**الحل/**

1) حسب القاعدة

$$R_x[(x,y)]=(x,-y)$$

$$\Rightarrow R_x[(3,-4)]=(3,-(-4))=(3,4)$$

2) حسب القاعدة

$$R_y[(x,y)]=(-x,y)$$

$$\Rightarrow R_y[(3,-4)]=(-3,-4)$$

## مثال (2)

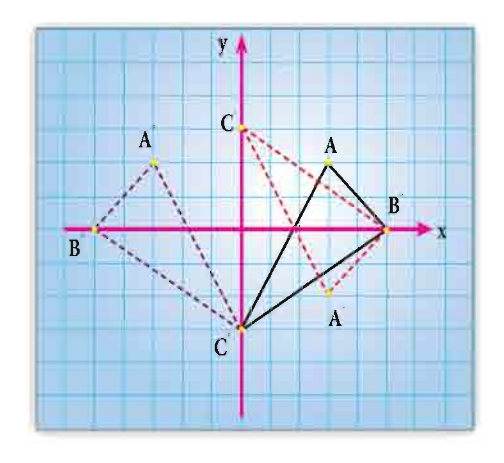
اذا كانت $A(3,2)$ , $B(5,0)$ , $C(0,-3)$ فجد صورة المثلث ABC

1) بالانعكاس في محور السينات ومثّله هندسياً .

2) بالانعكاس في محور الصادات ومثّله هندسياً .

**الحل/**

| انعكاس في محور الصادات | انعكاس في محور السينات |
|---|---|
| $A'' = R_y[(3,2)]=(-3,2)$ | $A' = R_x[(3,2)]=(3,-2)$ |
| $B'' = R_y[(5,0)]=(-5,0)$ | $B' = R_x[(5,0)]=(5,0)$ |
| $C'' = R_y[(0,-3)]=(0,-3)$ | $C' = R_x[(0,-3)]=(0,3)$ |






جد صورة المستقيم الذي معادلته $2x - 3y = 6$ تحت تأثير آنعكاس

1) بالنسبة لمحور السينات ومثله هندسياً .

2) بالنسبة لمحور الصادات ومثله هندسياً .

**الحل /** نجد نقطتين على المستقيم بوضع

$x = 0$

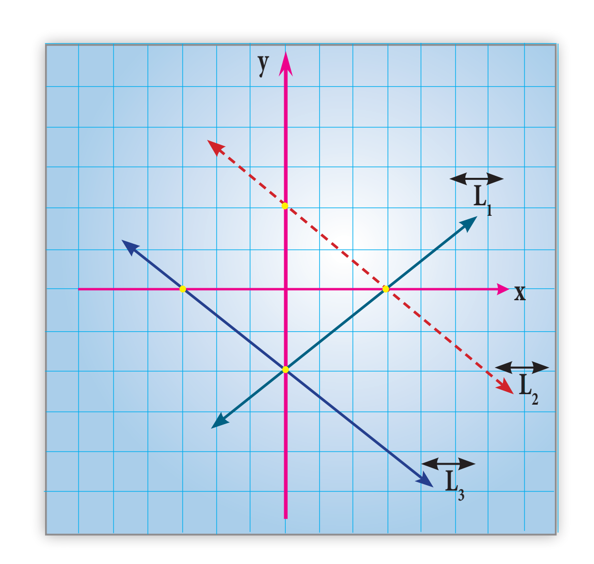
$\Rightarrow 2(0) - 3y = 6$ نعوضها في معادلة المستقيم

$\Rightarrow -3y = 6$

$\Rightarrow y = \frac{6}{-3} = \Rightarrow y = -2$

$\Rightarrow 2x - 3(0) = 6$ نعوض $y = 0$ في معادلة المستقيم

$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = \Rightarrow x = 3$




$\therefore$ النقطتان هما $(3, 0)$ ، $(0, -2)$

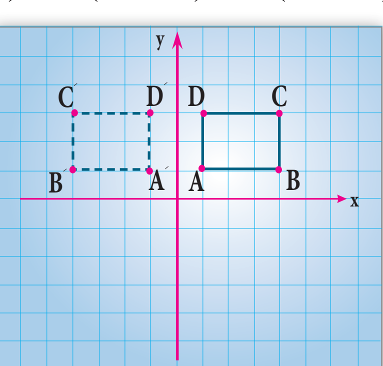
$\therefore \overleftrightarrow{L_1}$ يمثل المستقيم $2x - 3y = 6$

1) $R_x[(0, -2)] = (0, 2)$

$R_x[(3, 0)] = (3, 0)$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{L_2}$

2) $R_y[(0, -2)] = (0, -2)$

$R_y[(3, 0)] = (-3, 0)$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{L_3}$



مثال (4)

جد صورة الشكل الرباعي ABCD تحت تأثير الانعكاس في محور الصادات عندما يكون $A(1, 1), B(4, 1), C(4, 3), D(1, 3)$ ومثله هندسياً .

**الحل /**

$R_y[(1, 1)] = (-1, 1)$

$R_y[(4, 1)] = (-4, 1)$

$R_y[(4, 3)] = (-4, 3)$

$R_y[(1, 3)] = (-1, 3)$

# 8 – 3 الانسحاب Traslation

## [8 – 3 – 1] الانسحاب على المستوي الاحداثي :

**تعريف [8–1]**

هو تحويل هندسي ينقل كل نقطة P في المستوي الى $p'$ بحيث

$PP'$ = مسافة معينة ، $\overrightarrow{PP'}$ باتجاه معلوم .

## [8 – 3 – 2] صورة النقطة ( x , y ) تحت تاثير انسحاب مسافة معينة a :

فأن : 1 ) بالاتجاه الموجب لمحور السينات

$$T(x, y) = (x + a, y)$$

2 ) بالاتجاه السالب لمحور السينات

$$T(x, y) = (x - a, y)$$

3 ) بالاتجاه الموجب لمحور الصادات

$$T(x, y) = (x, y + a)$$

3 ) بالاتجاه السالب لمحور الصادات

$$T(x, y) = (x, y - a)$$

**مثال (1)**

اذا كانت النقطة ( 3 , –2 ) فأوجد صورة النقطة تحت تأثير أنسحاب مقداره ( 5 ) وحدات .

a ) بالاتجاه الموجب لمحور السينات .　　b ) بالاتجاه السالب لمحور السينات .

c ) بالاتجاه الموجب لمحور الصادات .　　d ) بالاتجاه السالب لمحور الصادات .

**الحل /** a )

$a = 5$

$T(x, y) = (x + a, y)$

$T(-2, 3) = (-2 + 5, 3) = (3, 3)$

b) $T(x, y) = (x - a, y)$

$T(-2, 3) = (-2 - 5, 3)$

$= (-7, 3)$

c) $T(x, y) = (x, y + a)$

$T(-2, 3) = (-2, 3 + 5)$

$= (-2, 8)$

d) $T(x, y) = (x, y - a)$

$T(-2, 3) = (-2, 3 - 5)$

$= (-2, -2)$

**ملاحظة**

الانسحاب يحافظ على :

الاستقامة والبينية وقياس الزاوية والتوازي .

# 4 - 8 الدوران Rotation

## [8 - 4 - 1] الدوران على المستوي الاحداثي :

**تعريف [2-8]**

الدوران في مستوٍ هو تحويل هندسي يحول النقطة O الى نفسها ويحول اي نقطة اخرى مثل a الى النقطة $a'$ حيث الزاوية $\theta$ تقرا ثيتا .

وان :

* الدوران $90^\circ$ حول نقطة الاصل .

1) دوران باتجاه عقارب الساعة $R_{90^\circ}(x, y) = (y, -x)$ .

2) دوران باتجاه عكس عقارب الساعة $R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$

* الدوران $180^\circ$ حول نقطة الاصل ( نصف دورة ) .

1) دوران باتجاه عقارب الساعة $R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y)$

2) دوران باتجاه عكس عقارب الساعة $R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y)$

* الدوران $270^\circ$ حول نقطة الاصل .

1) دوران باتجاه عقارب الساعة $R_{270^\circ}(x, y) = (-y, x)$

2) دوران باتجاه عكس عقارب الساعة $R_{270^\circ}(x, y) = (y, -x)$

## مثال

اذا كانت النقطة $(-2, 1)$ فجد صورة النقطة.

1) تحت تأثير دوران بزاوية قياسها $90^\circ$، مركزه نقطة الاصل.

a) باتجاه عكس عقارب الساعة . b) باتجاه عقارب الساعة .

**الحل/**

a) $R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x)$

$\therefore\ R_{90^\circ}(-2, 1) = (-1, -2)$

b) $R_{90^\circ}(x, y) = (y, -x)$

$\therefore\ R_{90^\circ}(-2, 1) = (1, 2)$

2) تحت تأثير دوران بزاوية قياسها $180^{o}$ ، مركزه نقطة الاصل.

باتجاه عكس عقارب الساعة

**الحل /**

b) $R_{180^{\circ}}(x,y)=(-x,-y)$

$\therefore\ R_{180^{\circ}}(-2,1)=(2,-1)$

3) تحت تأثير دوران بزاوية قياسها $270^{o}$ ، مركزه نقطة الاصل.

باتجاه عكس عقارب الساعة

**الحل /**

b) $R_{270^{\circ}}(x,y)=(y,-x)$

$\therefore\ R_{270^{\circ}}(-2,1)=(1,2)$

**ملاحظة**

بعض خواص الدوران :

يحافظ على الاستقامة و البينية وقياس الزوايا والتوازي.

## 8 - 5 التكبير Dilatation

هو تحويل هندسي مركزه O ومعامله K وهو يحول النقطة O الى نفسها ويحول اي نقطة اخرى

مثل $p(x,y)$ الى . $P'(x_1,y_1)$ ، $\overrightarrow{OP'}=K\overrightarrow{OP}$

اذا كان التكبير للنقطة $p(x,y)$ ، مركزه O نقطة الاصل ،معامله K فان

$$D[P(x,y)]=(Kx,Ky)$$

## مثال (1)

جد صورة ( 3 ,4 ) p تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الاصل ومعامله 2 .

**الحل/**

$p(3, 4)$

$K = 2$

$\because D[P(x, y)] = (Kx, Ky)$

$\therefore D[P(3, 4)] = ((2)(3), (2)(4))$

$= (6, 8)$

## مثال (2)

جد صورة ( 3 , 2− ) p تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الاصل ومعامله 3 .

**الحل/**

$p(-2, 3)$

$K = 3$

$\because D[P(x, y)] = (Kx, Ky)$

$\therefore D[P(-2, 3)] = ((3)(-2), (3)(3))$

$= (-6, 9)$

### [8 – 5 – 1] خواص التكبير :

1) يحافظ على الاستقامة.

2) يحافظ على البينية.

3) يحافظ على نسب الأبعاد.

4) يحافظ على قياس الزوايا.




جد صورة $\Delta ABC$ تحت تأثير تكبير معامله 2 ومركزه نقطة الاصل .

حيث $C(4,3)$ , $B(4,0)$ , $A(0,0)$ .

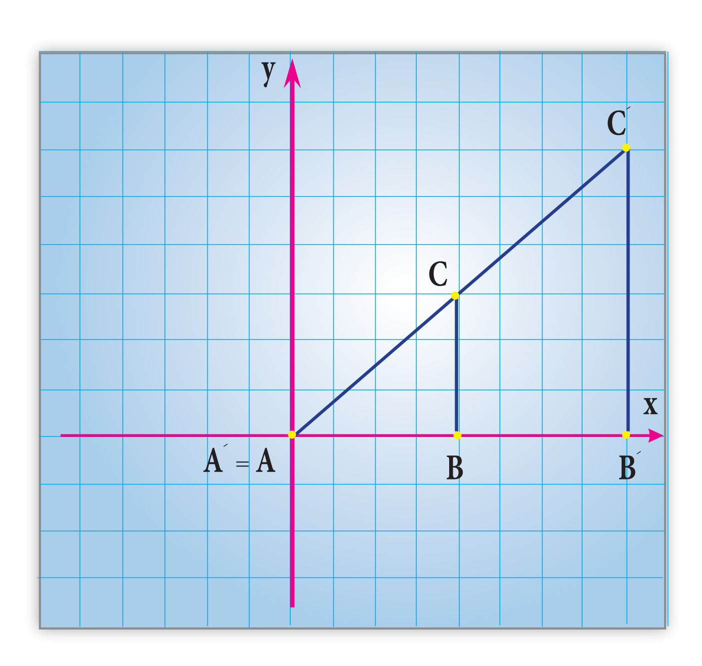
**الحل/**

$K = 2$

$D(0,0) = (2(0), 2(0)) = (0,0) = A'$

$D(4,0) = (2(4), 2(0)) = (8,0) = B'$

$D(4,3) = (2(4), 2(3)) = (8,6) = C'$






1) جد صورة النقطة $p(5, -3)$ .

a) تحت تأثير انعكاس على محور السينات .

b) تحت تأثير انعكاس على محور الصادات .

c) انسحاب مقداره (3) وحدات بالاتجاه الموجب لمحور السينات .

d) انسحاب مقداره (2) وحدات بالاتجاه السالب لمحور الصادات .

2) جد صورة $\Delta ABC$ تحت تأثير الانعكاس في محور السينات

حيث $A(1, 2), B(1, 4), C(4, 5)$

3) جد صورة المستقيم $x - y - 4 = 0$ تحت تأثير :

a) الانعكاس على محور السينات .

b) الانعكاس على محور الصادات .

4) جد صورة النقطة $(2,-1)$ تحت تأثير :

a) دوران بزاوية $90^\circ$ باتجاه عكس عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

b) دوران بزاوية $90^\circ$ باتجاه عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

c) تحت تأثير دوران بزاوية $180^\circ$ باتجاه عكس عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

d) تحت تأثير دوران بزاوية $180^\circ$ باتجاه عقارب الساعة . ومركزه نقطة الاصل .

5) جد صورة انسحاب المثلث الذي رؤوسه $A(-2,1)$ , $B(-3,3)$ , $C(1,4)$ .

مسافة قدرها (5) وحدات بالاتجاه الموجب لمحور السينات .

6) جد صورة النقطة $p(-4,3)$ تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الاصل ومعامله (2) .

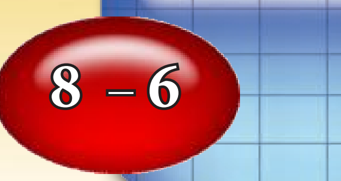
7) اذا كانت $A(-1,1)$ , $B(2,3)$ , $C(0,6)$ جد صورة المثلث ABC مركزه o

ومعامل تكبيره :

a) $k = 2$

b) $k = -2$

c) $k = \frac{1}{2}$



# المجموعات المتناسبة

اذا كانت المجموعتان $x=\{a,b\}$ , $y=\{c,d\}$ مجموعتين متقابلتين فيقال للمجموعتين المتقابلتين متناسبتان اذا كان $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

## مثال

بين اي المجموعات متناسبة .

1) $\{1,2\}$ , $\{2,4\}$

2) $\{3,6\}$ , $\{4,2\}$

3) $\{3,4,5\}$ , $\{6,8,10\}$

**الحل /**

1) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ متناسبة

2) $\frac{3}{4}\neq\frac{6}{2}$ غير متناسبة

3) $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$

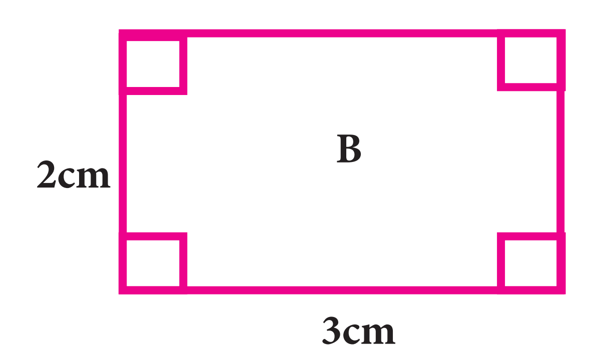
$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ متناسبة

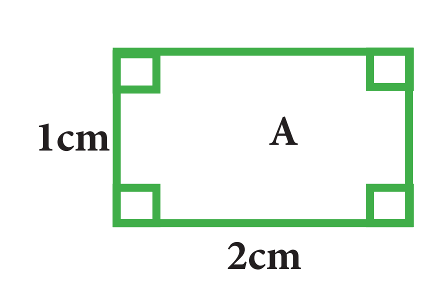
# 7 – 8 التشابه

ان مصطلح التشابه مفهوم لدى الغالبية العظمى من الناس حتى البعيدين منهم عن مادة الرياضيات .

وفي موضوع الاشكال الهندسية : –

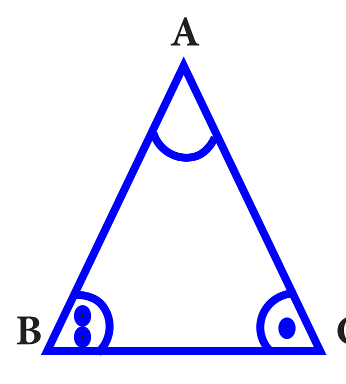
يقال لشكلين هندسيين انهما متشابهان اذا كانت زواياهما متساوية وتناسبت اطوال اضلاعهما المتناظرة (التي تقابل الزوايا المتساوية) . مثلاً

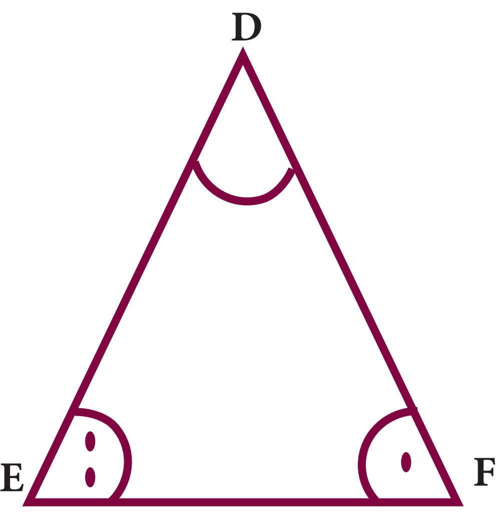



المستطيل A لا يشابه المستطيل B بالرغم من ان زواياهما متساوية .

وسوف نقتصر في دراستنا على المثلثات المتشابهة فقط في الشكل :–




متشابهان $\triangle\triangle$ DEF , ABC

1) $m\angle CAB = m\angle FDE$

$m\angle ABC = m\angle DEF$

$m\angle ACB = m\angle DFE$

2) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$



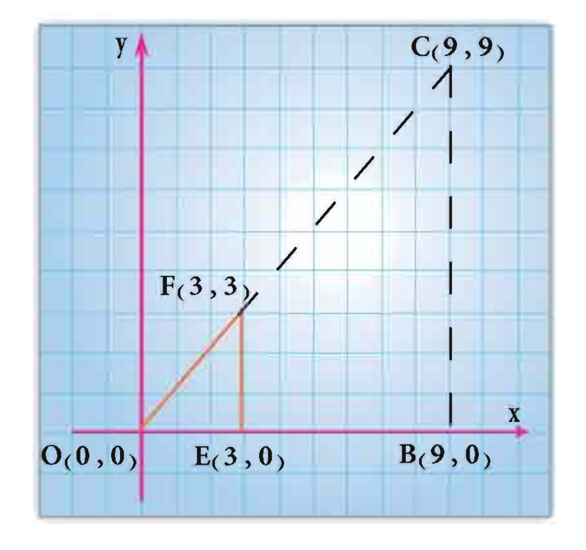
مثال (1)

اذا كان المثلث OBC تكبير للمثلث OEF بتكبير معامله 3 ومركزه نقطة الاصل .

حيث $O(0,0)$ ، $E(3,0)$ ، $F(3,3)$ ، بين هل اضلاعهما متناسبة ؟

الحل/

$$D(0,0) = (3(0), 3(0)) = (0,0)$$
$$D(3,0) = (3(3), 3(0)) = (9,0)$$
$$D(3,3) = (3(3), 3(3)) = (9,9)$$




$$FE = \sqrt{(3-3)^2 + (0-3)^2} = 3$$
$$OB = 9$$
$$OE = 3$$
$$BC = 9$$

$$OF = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$OC = \sqrt{(9-0)^2 + (9-0)^2}$$
$$= \sqrt{81+81} = \sqrt{2(81)} = 9\sqrt{2}$$

$$\frac{OB}{OE} = \frac{BC}{EF} = \frac{OC}{OF}$$
$$\frac{9}{3} = \frac{9}{3} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$\therefore$ الاضلاع متناسبة .

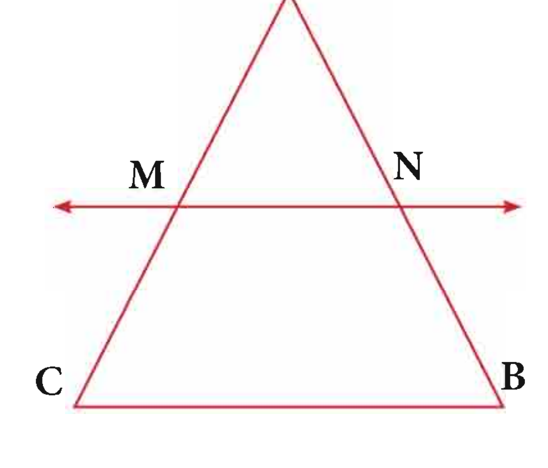
## مبرهنة/ 1 للاطلاع

**اذا رسم مستقيم يوازي ضلعاً في مثلث ويقطع ضلعيه الاخرين فان المثلث الناتج مشابه للمثلث الاصلي.**

المعطيات/ في المثلث ABC ، المستقيم MN يقطع ضلعيه $\overline{AB}, \overline{AC}$ في N , M على

الترتيب ، $\overleftrightarrow{MN} // \overline{BC}$

المطلوب أثباته/ ان المثلث AMN يشابه المثلث ABC




البرهان/ أفرض تكبير مركزه A بحيث

$C \rightarrow M \ , \ B \rightarrow N$

$\therefore \overleftrightarrow{MN}$ صورة $\overline{BC}$

∴ زوايا المثلثين المتناظره متساويه بالقياسات

لأن التكبير يحافظ على قياس الزوايا .

كذلك $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} =$ معامل التكبير

∴ المثلثان متشابهان

## مبرهنة/ 2 للاطلاع

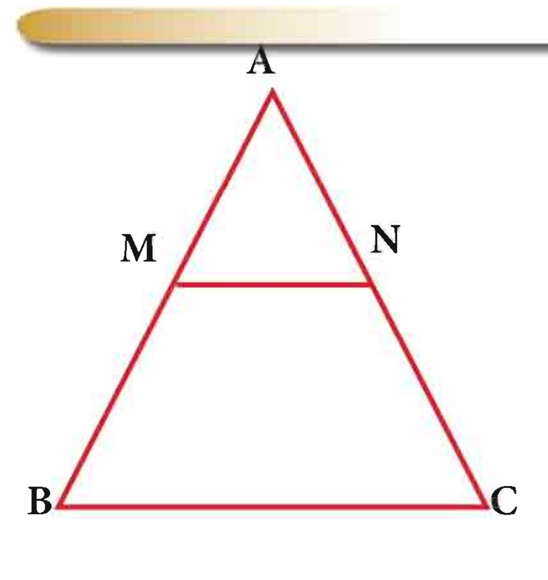
**يتشابه المثلثان اذا تساوت قياسات زواياهما .**

المعطيات/ المثلثان ABC , A´B´C´ فيهما

$m\angle A = m\angle A'$

$m\angle B = m\angle B'$

$m\angle C = m\angle C'$




المطلوب أثباته/ المثلث ABC يشابه المثلث $A'B'C'$

البرهان /

لتكن M نقطة تنتمي الى $\overline{AB}$ بحيث $A'B' = AM$ ، وليكن $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \Delta ABC$ يشابه $\Delta AMN$ ..... [مبرهنة 1]

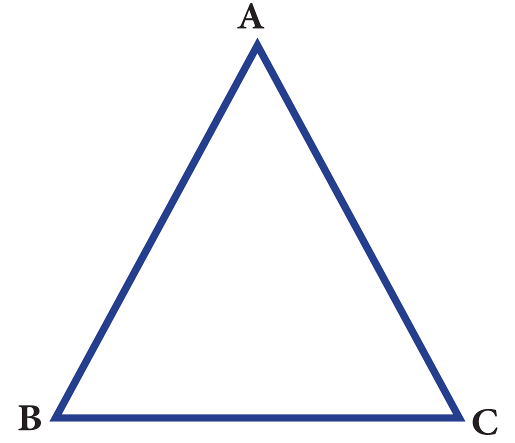
لكن $\Delta AMN$ يشابه $\Delta A'B'C'$ ...... (لأن المثلثين متطابقان)

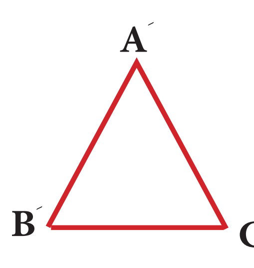
$\therefore \Delta ABC$ يشابه $\Delta A'B'C'$ ( و . هـ . م )

## مبرهنة / 3

يتشابه المثلثان اذا تناسبت أطوال اضلاعهما .

سنقبل هذه المبرهنة بدون برهان




اذا كان :

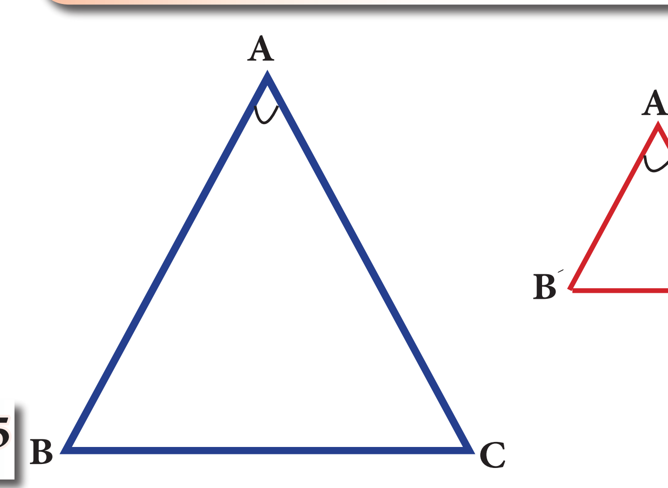
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

فان $\Delta ABC$ يشابه $\Delta A'B'C'$

## مبرهنة / 4

يتشابه مثلثان اذا طابقت زاوية في مثلث نظيرتها في مثلث اخر وكان طولا الضلعين المحيطين بها متناسبين مع طولي الضلعين المحيطين بنظيرتها .

سنقبل هذه المبرهنة بدون برهان




$\Delta ABC$ و $\Delta A'B'C'$ فيهما

$$m\angle A = m\angle A'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$\therefore \Delta ABC$ يشابه $\Delta A'B'C'$

## مبرهنة / 5

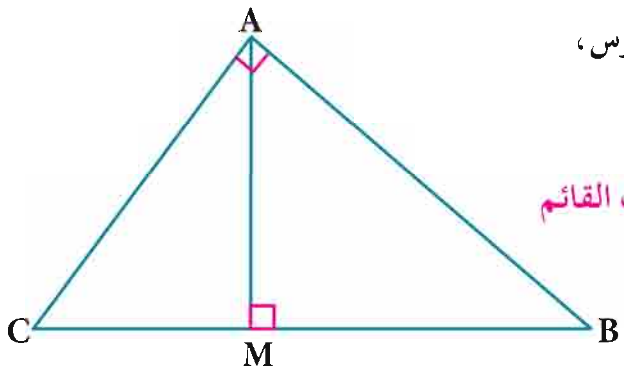
اذا كان المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $A$ و $\overline{BC} \perp \overline{AM}$ فان

$$(AB)^2 = BC \cdot BM$$

$$(AC)^2 = BC \cdot CM$$

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

سنقبل هذه المبرهنة بدون برهان




والجزء (3) من المبرهنة يعرف بإسم مبرهنة فيثاغورس،

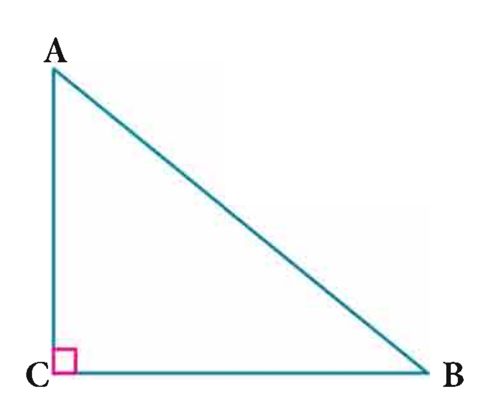
ونص هذه المبرهنة :

[مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين في المثلث القائم الزاوية يساوي مربع طول الوتر].

## مبرهنة / 6 ( عكس مبرهنة فيثاغورس )

في المثلث $ABC$ اذا كان : $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ فان $\angle C$ قائمة .

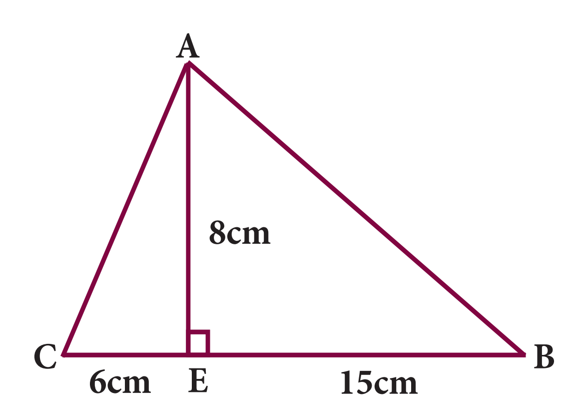
سنقبل هذه المبرهنة بدون برهان






في الشكل جد AB ، AC في $\Delta$ ABC حسب الأطوال المبينة على الشكل .

**الحل/**




$$(AB)^2 = (AE)^2 + (EB)^2$$
$$= (8)^2 + (15)^2$$
$$= 64 + 225$$
$$= 289$$
$$AB = 17\ cm$$

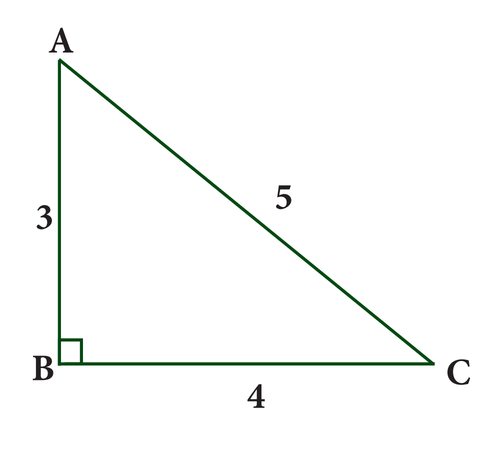
$$(AC)^2 = (AE)^2 + (EC)^2$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$
$$AC = 10\ cm$$

## مثال (3)

في المثلث ABC , $AB = 3cm$ , $BC = 4cm$ , $AC = 5cm$ .

هل المثلث قائم الزاوية ولماذا ؟

**الحل/**




$$(BC)^2 = (4)^2 = 16\ cm$$
$$(AB)^2 = (3)^2 = 9\ cm$$
$$(AC)^2 = (5)^2 = 25\ cm$$
$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$
$$25 = 16 + 9$$
$$25 = 25$$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في B .




**س1 /**

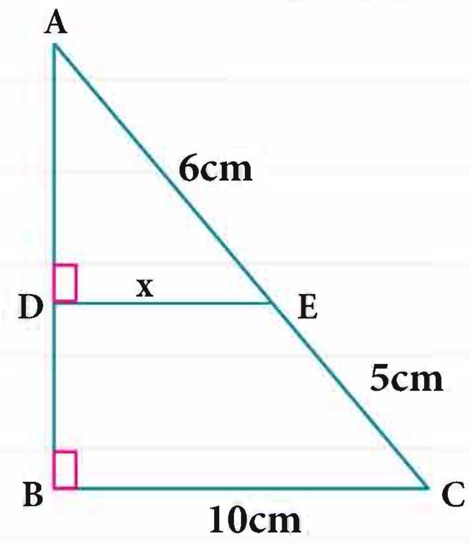
**اذا كان المثلث ABC يشابه المثلث DEF , حيث ان $m\angle B = 40^\circ$ ، $m\angle A = 70^\circ$**

**جد 1) قياس زاوية C .**

**2) قياس زاوية E .**

**س2 /**

**في الشكل :- اذا كان BC = 10cm و AC = 11cm جد قيمة x .**




**س3 /**

**اذا كان المثلثان ABC و AEN متشابهين وفيهما النقطة $E \in \overline{AB}$ , $N \in \overline{AC}$**

**AN = 5cm , NC = 3cm , EB = 2cm , EN = 3cm**

**جد 1) AB**

**2) BC**

# الفصل التاسع 9

# حساب المثلثات
# Trigonometry

[ 9-1 ] المثلثات .

[ 9-2 ] النسب المثلثية .

[ 9-3 ] النسب المثلثية للزوايا الخاصة .

| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
|---|---|
| جيب الزاوية | $\sin\ \theta$ |
| جيب تمام الزاوية | $\cos\ \theta$ |
| ظل الزاوية | $\tan\ \theta$ |

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

C
المقابل
الوتر
B
θ
A
المجاور

الفصل 9

# حساب المثلثات 1 - 9

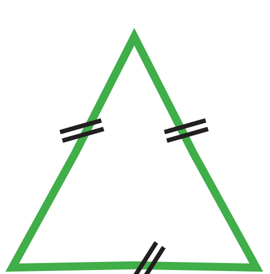
## مقدمة

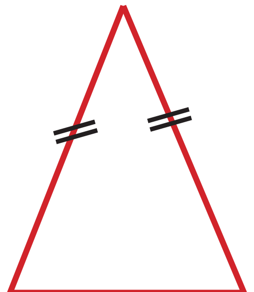
سبق ان تعرفت على المثلث وعناصره حيث يتكون من ثلاث زوايا يسمى بانواعها :

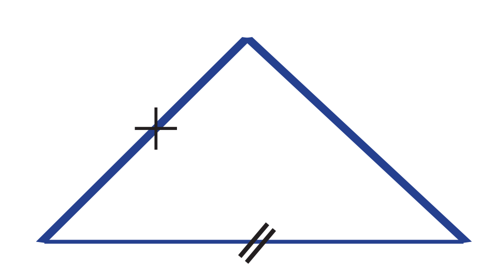
- □ مثلث حاد الزوايا ( جميع زواياه حادة اي اقل من $90^\circ$ ) .
- □ مثلث قائم الزواية ( يحتوي على زاوية قائمة $= 90^\circ$ ) .
- □ مثلث منفرج الزاوية ( احدى زواياه منفرجة اي اكبر من $90^\circ$ ) .

وثلاثة اضلاع يسمى بانواعها :

- مثلث متساوي الاضلاع .   - مثلث متساوي الساقين .   - مثلث مختلف الاضلاع .







وهناك علاقات مهمة بين زوايا المثلث واضلاعه ومن هذه العلاقات مايدعى بالنسب المثلثية وما يهمنا في هذا الفصل هو المثلث القائم الزاوية .

لاحظ في الشكل المجاور المثلث ABC القائم الزاوية في B حيث ان :



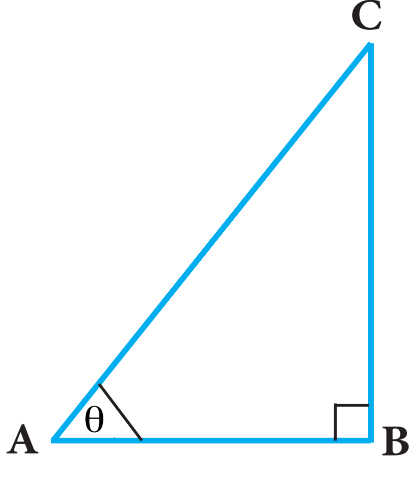
الضلع ( $\overline{AC}$ ) يدعى الوتر ( مقابل للزاوية القائمة )

والضلع ( $\overline{BC}$ ) يدعى المقابل للزاوية $\theta$ .

اما الضلع ( $\overline{AB}$ ) فيدعى المجاور للزاوية $\theta$ .

والمبرهنة التي تربط بين اطوال هذه الاضلاع تدعى مبرهنة فيثاغورس

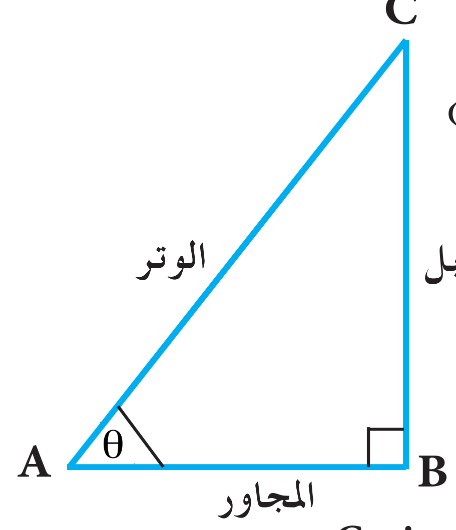
حيث $(BC)^2 + (AB)^2 = (AC)^2$





# النسب المثلثية

في الشكل المجاور $\Delta ABC$ قائم الزاوية في B والزاوية θ احدى الزاويتين الحادتين




1) تدعى النسبة $\frac{\text{مقابل الزاوية } \theta}{\text{الوتر}}$ جيب الزاوية θ (**sine**)

ويكتب بشكل : $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$

**Sin** اختصار كلمة **Sine**

2) تدعى النسبة $\frac{\text{مجاور الزاوية } \theta}{\text{الوتر}}$ جيب تمام الزاوية θ (**Cosine**)

ويكتب بشكل : $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

**Cos** اختصار كلمة **Cosine**

3) تدعى النسبة $\frac{\text{مقابل الزاوية } \theta}{\text{مجاور الزاوية } \theta}$ ظل الزاوية θ (**Tangent**)

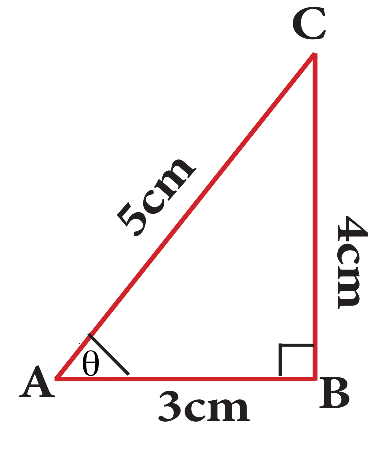
وتكتب بشكل : $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$

**tan** اختصار كلمة **Tangent**



## مثال (1)

مثلث **ABC** كما في الشكل : جد : **sin θ , cos θ , tan θ** .

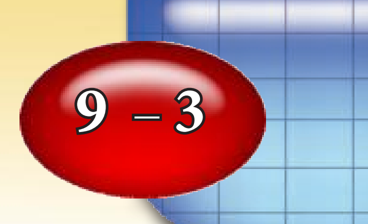



**الحل/**

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{3}$$



# 9 – 3 بعض العلاقات المثلثية

من الشكل المجاور وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ و بالقسمة على $(AC)^2$ .

$$\left(\frac{AC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

بالقسمة على AC

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



## مثال (2)

في Δ ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\cos A = \frac{8}{17}$ فجد tanA , sinA

**الطريقة الاولى** $\cos A = \frac{8K}{17K}$ حيث $K > 0$ ، ∴ المجاور $= 8K$ ، الوتر $= 17K$

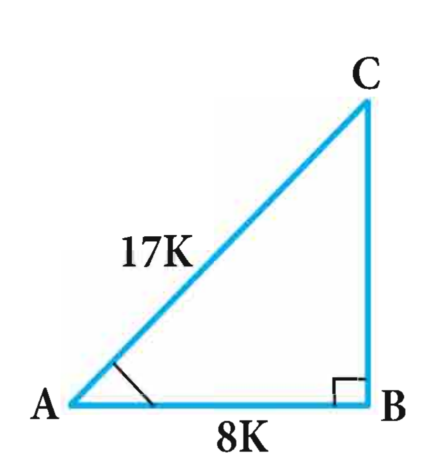
وحسب مبرهنة فيثاغورس $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

$$(8K)^2 + (BC)^2 = (17K)^2$$

$$64K^2 + (BC)^2 = 289K^2$$

$$(BC)^2 = 289K^2 - 64K^2$$

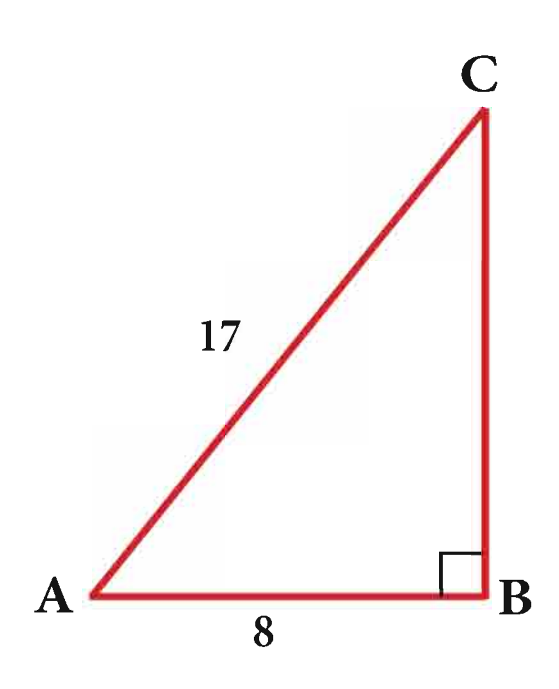
$$(BC)^2 = 225K^2 \Rightarrow BC = 15K$$




$$\sin A = \frac{BC}{AC} \Longrightarrow \sin A = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} \Longrightarrow \tan A = \frac{15K}{8K} = \frac{15}{8}$$

## الطريقة الثانية




$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\therefore \sin^2 A + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{64}{289}$$

$$\sin A = \frac{15}{17}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\therefore \tan A = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$



# 9 – 4 النسب المثلثية للزوايا الخاصة

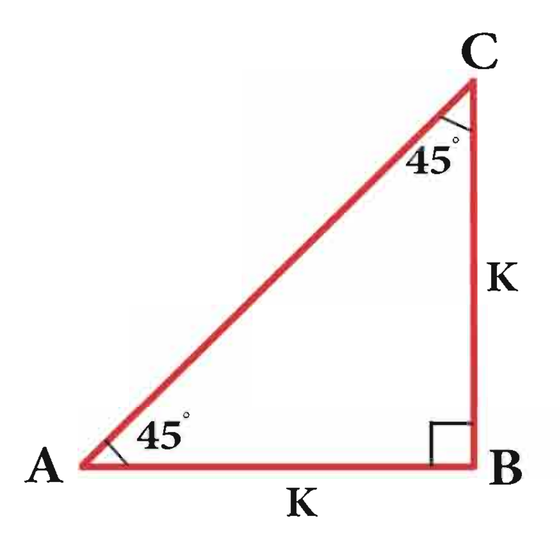
اولاً :النسب المثلثية للزاوية $45^0$ : نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B بحيث ان AB = BC

$$\because\ m\angle B = 90^0 \Rightarrow m\angle A + m\angle c = 90^0$$

$$\because\ AB = BC$$

$$\therefore\ m\angle A = m\angle C = 45^0$$

نفرض ان $AB = BC = K > 0$




حسب مبرهنة فثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = K^2 + K^2$$

$$(AC)^2 = 2K^2$$

$$AC = \sqrt{2}\,K$$

$$\sin 45^\circ = \frac{K}{\sqrt{2}K} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{K}{\sqrt{2}K} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{K}{K} \Rightarrow \tan 45^\circ = 1$$

## مثال (1)

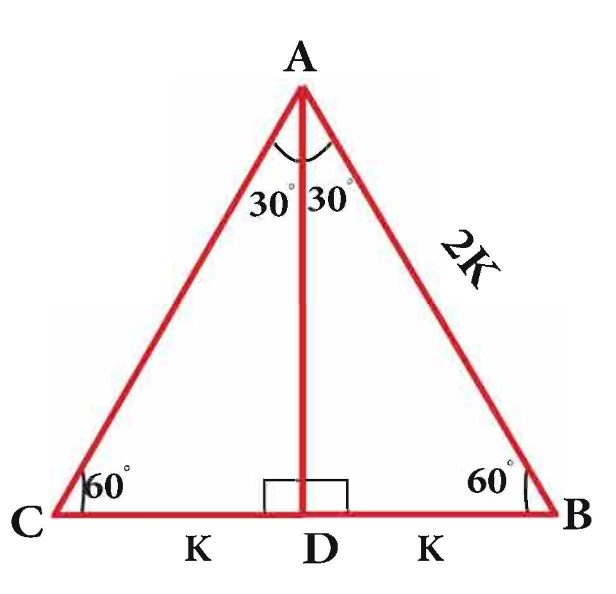
جد ناتج $(2\cos 45^\circ + \tan 45^\circ)^2$

**الحل/** $\tan 45^\circ = 1$ , $\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\because \left((2)\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right) + 1 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

**ثانياً : زاوية قياسها $30^0$ ، $60^0$ :** نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع طول ضلعه $2k$ فيكون قياس كل زاويه منها $60^0$ نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فينصفه لاحظ الشكل المجاور وحدة $K$ $\therefore BD = DC = K$ وان قياس الزاوية $m\angle BAD = 30^0$ وبستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد بان $AD = \sqrt{3}\,K$




$$\sin 30^\circ = \frac{K}{2K} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}K}{2K} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{K}{\sqrt{3}K} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

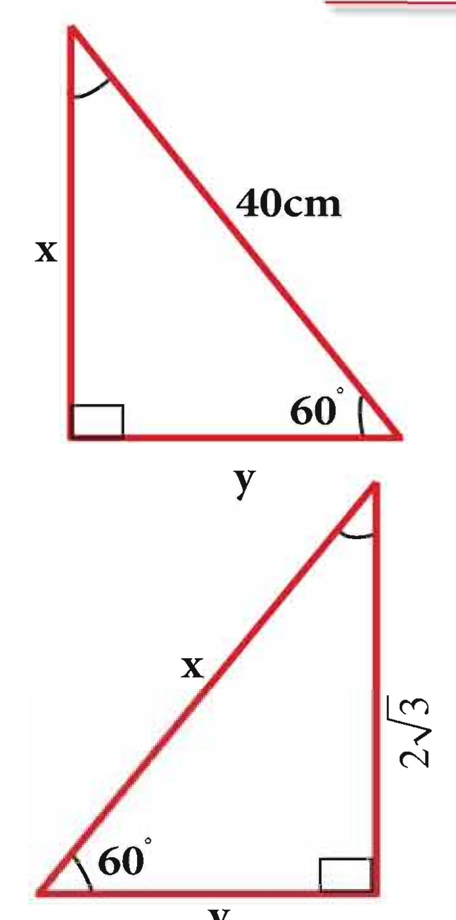
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}K}{2K} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{K}{2K} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}K}{K} \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

## مثال (2)

من الشكل المجاور جد قيمة $x, y \in R$ .




**الحل/** (a)

$$\cos 60^\circ = \frac{y}{40} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{40}$$

$$\therefore y = \frac{40}{2} \Rightarrow y = 20$$

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{40} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}$$

$$\therefore 2x = 40\sqrt{3} \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

(b)

$$\sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{x}$$

$$4\sqrt{3} = \sqrt{3}\,x \Rightarrow x = 4$$

$$\tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{y}$$

$$\therefore \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 2$$

حاول حل المثال باستخدام نسب مثلثية للزاوية $30^\circ$ .




س1 / جد قيمة كل مما ياتي :

1) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

2) $(\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

س2 / ABC مثلث قائم الزاوية في B حيث $BC = 8cm , AB = 15cm$

جد $\sin C , \cos C , \tan C$

س3 / اثبت ان

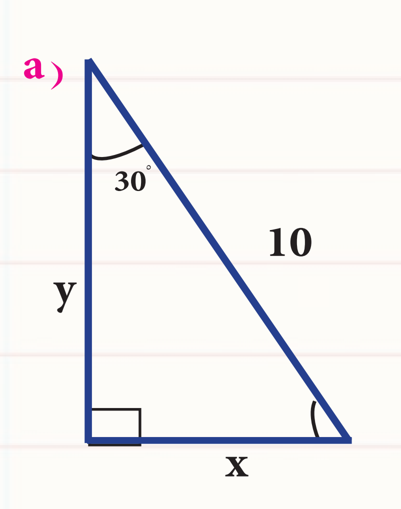
a) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

b) $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

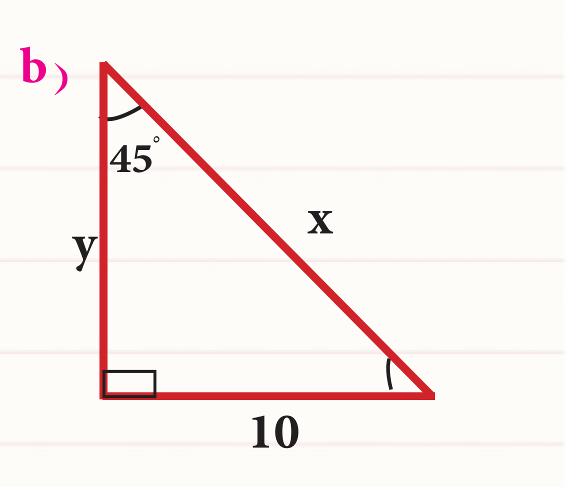
c) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

س4 / جدقيمة $x , y \in R$ من المثلثين :

a)




b)



# الفصل العاشر 10

# الاحصاء
# Statistics



| المصطلح | الرمز او العلاقة الرياضية |
|---|---|
| الوسط الحسابي للقيم :X | $\bar{x}$ |
| الوسيط | ME |
| المنوال | MO |

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7}{7}$$




# الاحصاء

## مقدمة

درسنا في المراحل السابقة طرق جمع وتمثيل البيانات . وكان من الصعب ايجاد مقياس يعبر عن الظاهرة موضوع الدراسة ، لذلك سنبحث عن مقياس اي قيمة واحدة تتراكم حولها عدد كبير من القيم ، وهذا الميل حول تلك القيمة يسمى بالنزعة المركزية للتوزيع البياني وتسمى تلك القيمة بمقياس النزعة المركزية ( Measures of Central Tendency ) .

ان مقاييس النزعة المركزية (القيم المتوسطة) هي قيم احصائية ذات اهمية كبيرة في وصف التوزيعات البيانية، ومن اهم مقاييس النزعة المركزية التي سنتناول دراستها في هذه المرحلة هي :

1 - الوسط الحسابي Arithmatic Mean .

2 - الوسيط Median.

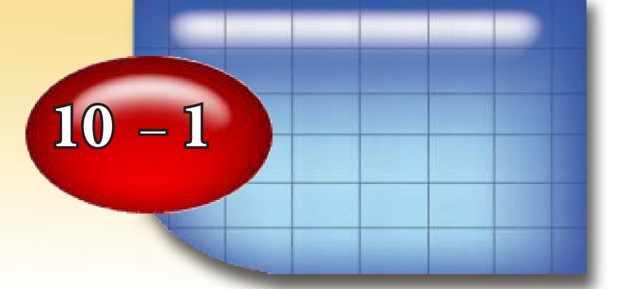
3 - المنوال Mode .

بشكل , مبسط طريقة استخراجها ومزاياها وعيوبها .

يعتبر الوسط الحسابي او المتوسط اكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً واكثرها استخداماً لبساطة حسابه واستخراجه . نعطي هنا تعريفاً للوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة (البيانات الاولية او الاصلية التي جمعت ولم تبوب او توضع بشكل جدول)

### تعريف [10-1]

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم لبيانات غير مبوبة بانه مجموع القيم مقسوماً على عددها ويرمز للوسط الحسابي عادة بالرمز $\overline{X}$ (ويقرأ أكس بار X bar )




# الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة

فاذا كان لدينا n من قيم $x_i$ هي : $x_n$ : .... , $x_1 , x_2 , x_3$ : $x_i$ عندئذ يكون :

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

## مثال (1)

اوجد الوسط الحسابي للاعداد الاتية : ( 3 , 2 , 7, 5 , 4 , 6 , 8 ) .

**الحل /**

الوسط الحسابي $\overline{x}$ هو :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7}{7}$$

$$\overline{x} = \frac{3 + 2 + 7 + 5 + 4 + 6 + 8}{7}$$

$$\overline{x} = \frac{35}{7} = 5$$




اذا كانت اعمار ثمانية اشخاص بالسنين هي : ( 4, 8 , 10 , 12 , 16 , 18 , 20 , 24 ) .

جد الوسط الحسابي لاعمارهم.

**الحل /**

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} \quad , n = 8$$

$$\overline{x} = \frac{4 + 8 + 10 + 12 + 16 + 18 + 20 + 24}{8} = \frac{112}{8} = 14$$

# 10 – 2 الوسط الحسابي للتوزيع التكراري البسيط

اذا كان لدينا n من قيم $X_i$ هي : $X_1 , X_2 , X_3 , \ldots : X_n$ ويقابلها n من تكرار $f_i$

وهي : $f_i : f_1 , f_2 , f_3 , \ldots : f_n$ .

فيعرف الوسط الحسابي بانه مجموع حواصل ضرب $X_1$ في التكرارات المناظرة $f_i$ مقسوماً على مجموع التكرارات .

اي :

$$\bar{x} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + \ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

## مثال (3)

اوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري التالي لاعمار (14) شخص :

| العمر | 13 | 10 | 9 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| عدد الاشخاص | 2 | 4 | 5 | 3 |

**الحل /**

$$x_1 = 8 \;,\; f_1 = 3 \;,\; x_2 = 9 \;,\; f_2 = 5 , \ldots$$

$$\bar{x} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}$$

$$\bar{x} = \frac{(8)(3) + (9)(5) + (10)(4) + (13)(2)}{3 + 5 + 4 + 2}$$

$$= \frac{24 + 45 + 40 + 26}{14} = \frac{135}{14}$$

يمكن حل السؤال كما في الجدول الاتي :

| $x_1$ | $f_1$ | $x_1f_1$ | |
|---|---|---|---|
| 8 | 3 | (8)(3)=24 | |
| 9 | 5 | (9)(5)=45 | |
| 10 | 4 | (10)(4)=40 | |
| 13 | 2 | (13)(2)=26 | |
| | 14 | 135 | المجموع |

$$\therefore \bar{x} = \frac{135}{14}$$



## 3 - 10 الوسط الحسابي للتوزيع التكراري ذي الفئات

**تعريف [2-10]**

يعرف الوسط الحسابي للبيانات المبوبة بأنه مجموع حواصل ضرب مراكز الفئات (والتي يرمز لها $X_i$) في التكرارات المناظرة $f_i$ وقسمة الناتج على مجموع التكرارات .

فإذا كان لدينا n من مراكز الفئات وهي على التوالي : $x_1 ، x_2 ، x_3 ,.....x_n$ وإن التكرارات المناظرة لها هي : $f_1 , f_2 , f_3 , ......f_n$ على التوالي . عندئذ يكون الوسط الحسابي x بحسب القانون الآتي :

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

ولإيجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة نتبع الخطوات التالية :

1) نجد مركز كل فئة من الفئات $x_i$ .

2) نضرب مركز كل فئة $x_i$ في التكرار المناظر لها $f_i$ .

3) نجد مجموع حواصل الضرب .

4) نجد $\overline{x}$ بقسمة مجموع حواصل ضرب مراكز الفئات في التكرارات وقسمتها على مجموع التكرارات .




الجدول التالي يمثل توزيع 150 حاجة حسب فئات الوزن بالكيلو غرام (kg) .

| الوزن | 15– | 25– | 35– | 45– | 55– | 65–75 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الحاجات | 9 | 15 | 23 | 30 | 33 | 40 |

إحسب الوسط الحسابي للوزن .

**الحل /** نجد مراكز الفئات :

مركز الفئة الأولى : $x_1 = \frac{15+25}{2} = \frac{40}{2} = 20$

مركز الفئة الثانية : $x_2 = \frac{25+35}{2} = \frac{60}{2} = 30$ وهكذا نعمل الجدول التالي :

| فئات الوزن | التكرار $f_i$ | مركز الفئات $x_i$ | $f_i x_i$ |
|---|---|---|---|
| 15– | 9 | 20 | (9)(20)=180 |
| 25– | 15 | 30 | (15)(30)= 450 |
| 35– | 23 | 40 | (23)(40)= 920 |
| 45– | 30 | 50 | (30)(50)= 1500 |
| 55– | 33 | 60 | (33)(60)= 1980 |
| 65–75 | 40 | 70 | (40)(70)= 2800 |
| المجموع | 150 | | 7830 |

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$\bar{x} = \frac{7830}{150} = 52.2kg$$

## مثال 5

جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الآتي:

| الفئات | 60– | 62– | 64– | 66– | 68–70 |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 18 | 42 | 27 | 8 |

**الحل/** نجد مركز الفئة الأولى: $x_1 = \frac{60 + 62}{2} = \frac{122}{2} = 61$

نجد مركز الفئة الثانية: $x_2 = \frac{62 + 64}{2} = \frac{126}{2} = 63$ نعمل الجدول الآتي:

| الفئات | التكرار $f_i$ | مركز الفئات $x_i$ | $f_ix_i$ |
|---|---|---|---|
| 60– | 5 | 61 | (5)(61)=305 |
| 62– | 18 | 63 | (18)(63)=1134 |
| 64– | 42 | 65 | (42)(65)=2730 |
| 66– | 27 | 67 | (27)(67)=1809 |
| 68– | 8 | 69 | (8)(69)=552 |
| | 100 | | 6530 |

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$\bar{x} = \frac{6530}{100} = 65.3$$

# 4 – 10 مزايا وعيوب الوسط الحسابي

## أولاً: المزايا:

* يمتاز بسهولة حسابه .
* تدخل جميع القيم في حسابه.

## ثانياً: العيوب:

* لايمكن إيجاده بيانياً
* يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة التي تكون كبيرة جداً أو صغيرة جداً بالنسبة لمعظم القيم وبالتالي ترفع أو تخفض قيمة الوسط الحسابي.

مثلاً: لتأخذ الاعداد الاتية: 10 , 9 , 7 , 3 , 1 وتجد الوسط الحسابي لها فيكون الوسط الحسابي لها x حيث :

$$\bar{x} = \frac{1+3+7+9+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

لو اضفنا لها العدد 300 فتكون الاعداد 1 , 3 , 7 , 9 , 10 , 300 والوسط الحسابي لهذه الاعداد هذه المرة يكون

$$\bar{x} = \frac{1+3+7+9+10+300}{6} = \frac{330}{6} = 55$$

لاحظ الوسط الحسابي للقيم 10 , 9 , 7 , 3 , 1 هو (6) بينما اصبح (55) بالنسبة للقيم 300 , 10, 9 , 7 , 3 , 1 ونفس الشي بالنسبة للقيم الصغيرة جداً.

# 10 - 5 الوسيط

يعتبر وسيط مجموعة من البيانات ( القيم ) قياساً مهماً آخر من مقاييس النزعة المركزية . وسنقتصر في دراستنا لهذه المرحلة على تعريف وايجاد الوسيط للبيانات غير المبوبة .

## تعريف [10-3]

وسيط مجموعة من القيم : $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ في حالة :

**اولاً : n عدد فردي**

هو القيمة التي تقع في الوسط عند ترتيب القيم تصاعدياً او تنازلياً ويكون ترتيبه $\frac{n+1}{2}$

**ثانياً : n عدد زوجي**

هو القيمة التي تقع في منتصف (معدل) القيمتين الوسطيتين بعد ترتيب القيم تصاعدياً او تنازلياً .

ويكون ترتيبها $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ وسنرمز للوسيط بالرمز ME .

### مثال (1)

جد الوسيط للقيم الاتية : 5 , 6 , 4 , 2 , 3

**الحل /** نقوم بترتيب القيم تصاعدياً كما يلي : ترتيب الوسيط $\frac{n+1}{2} \Rightarrow \frac{5+1}{2} = 3$

2 , 3 , (4) , 5 , 6

لان عدد القيم فردي (5) فان قيمة الوسيط تقع في الوسط .

$\therefore \ ME = 4$

### مثال (2)

جد الوسيط للقيم الاتية : 9 , 6 , 5 , 4 , 2 , 3

**الحل /** نقوم بترتيب القيم تصاعدياً كما يلي : 9 , 6 (4 , 5) , 3 , 2 ترتيب الوسيطين هما 4,5

لان عدد القيم زوجي (6) فان قيمة الوسيط هي الوسط الحسابي للقيمتين في الوسط وهما كما واضح :

$$ME = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$




جد الوسيط لمجموعة القيم الاتية : 7 , 7 , 11 , 7 , 5 , 4 , 3 , 2 , 3 , 2

**الحل /** نقوم بترتيب القيم تصاعدياً كما يلي : ترتيب الوسيطين هما $5,6 = \frac{10}{2} = \frac{n}{2}$

2 , 2 , 3 , 3 , 4 , 5 , 7 , 7 ,7 , 11

الوسيط = $\frac{4 + 5}{2}$ ( معدل القيمتين الوسطيتين )

$\therefore ME = 4.5$




# مزايا وعيوب الوسيط

## اولاً : المزايا :

* يمكن ايجاده بيانياً ( خارج نطاق دراستنا لهذه المرحلة ) .
* لا يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة .

مثلاً : الوسيط للاعداد 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 ,3 , 2 , 1 هو (5) يتوسط القيم لان عدد القيم فردي (9)

الوسيط للاعداد : 200 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 هو (5) ايضاً ونفس الشي اذا كان عدد القيم زوجياً .

## ثانياً : العيوب

* لا تدخل جميع القيم في حسابه .



# 7 -10 المنوال

يعتبر المنوال مقياساً آخرَ مهما من مقاييس النزعة المركزية . ويمكن تعريفه للبيانات غير المبوبة كما يلي .

**تعريف [4-10]**

منوال مجموعة القيم $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ هو القيمة الشائعة اي التي تتكرر اكثر من غيرها ضمن قيم المجموعة . وسنرمز للمنوال بالرمز **MO** .



**مثال (1)**

جد المنوال للقيم الاتية :

**11 , 9 , 5 , 4 , 8 , 6 , 9 , 13 , 12 , 7**

**الحل /**

لاحظ ان القيمة (9) تكررت مرتين لذا فان :

$$MO = 9$$



**مثال (2)**

جد المنوال للقيم الاتية :

**10 ، 5 ، 5 ، 4 ، 7 ، 8 ، 2 ، 12 ، 2 ، 3**

**الحل /**

لاحظ ان : القيمة (5) تكررت مرتين كذلك القيمة (2) تكررت مرتين فيكون لهذه القيم منوالان هما 2 , 5 اي :

$$MO_1 = 2 , \ MO_2 = 5$$




هل يوجد منوال للقيم الاتية؟

12 , 17 ,13 ,9 , 8 , 2 , 5 , 4 , 1

**الحل /**

ليس لهذه القيم منوال والسبب هو عدم تكرار أية قيمة من هذه القيم .

## 8 – 10 مزايا وعيوب المنوال

### اولاً : المزايا

* بسيط من حيث الفكرة والحساب.
* لا يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة.

### ثانياً : العيوب

* قد لا يكون هناك منوال .
* قد يكون هناك اكثر من منوال.




س1 / جد ان امكن الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال لكل مما يأتي:

a) 11 , 20 , 5 , 8 , 12 , 17 , 9

b) 8 , 4 , 9 , 5 , 2 , 4 , 4 , 2 , 6 , 7 , 2

c) 12 , 24 , 16 , 20 ,10 , 8 ,18 , 4 , 20

d) 2 , 5 , 9 , 5 , 7 , 7 ,11 , 9 , 7

س2 / من الجدول الاتي جد الوسط الحسابي.

| 20 | 17 | 12 | 7 | 9 | 6 | الوزن |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | العدد |

س3 / اوجد الوسط الحسابي لاوزان (40) طالباً بالكيلو غرام من الجدول التكراري الاتي:

| 70- 80 | 60- | 50- | 40- | 30- | الاوزان |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 15 | 10 | التكرار |

س4 / احسب الوسط الحسابي للقيم المعطاة في الجدول الاتي:

| 20-23 | 17- | 14- | 11- | 8- | 5- | الفئة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 7 | 9 | 11 | التكرار |

# الفهرست